

КРИМИНАЛИСТИЧКО-ПОЛИЦИЈСКИ УНИВЕРЗИТЕТ



Департман информатике и рачунарства

Михаило Н. Јовановић

**ОПТИМИЗАЦИЈА МАТЕМАТИЧКИХ
МОДЕЛА ЗА ЛОГИСТИКУ БЕЗБЕДНОСТИ И
ЕФИКАСНОГ ОДЛУЧИВАЊА У
КОЛАБОРАТИВНИМ ВЕБ СЕРВИСИМА
ЕЛЕКТРОНСКЕ УПРАВЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ**

- докторска дисертација -

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF CRIMINAL INVESTIGATION AND POLICE
STUDIES



Department of Informatics and Computer Sciences

Mihailo N. Jovanović

**OPTIMIZATION OF MATHEMATICAL MODELS FOR
SECURITY LOGISTICS AND EFFICIENT DECISION-
MAKING IN COLLABORATIVE WEB SERVICES OF THE
ELECTRONIC GOVERNMENT OF THE REPUBLIC OF
SERBIA**

- doctoral dissertation -

Belgrade, 2022.

Наслов докторске дисертације: „Оптимизација математичких модела за логистику безбедности и ефикасног одлучивања у колаборативним веб сервисима електронске управе Републике Србије“

Сажетак: Свеprisутна употреба информационо-комуникационих технологија (ИКТ) и глобална умреженост људи и ресурса довела је до брзих и често непредвидих промена у сваком сегменту живота, рада и деловања људи. Овакве рапидне промене настају, пре свега, као последица све већег утицаја и доминације информатичког друштва. Наиме, у готово свим аспектима човековог деловања, као и његовог окружења у целини, захтева се савремен приступ управљању људским активностима. Дакле, коришћење огромне количине података и информација, као основног фактора одлучивања, мора бити такво да је у исто време могуће узети у обзир и знање као кључни елемент, а до кога је могуће доћи само коришћењем савремених ИКТ, односно унутар ефикасно организованих информационих система. Посебно важну улогу у животу и даљем развоју таквог дигиталног друштва има имплементација електронских веб сервиса. Научно истраживање у предложеној дисертацији било је фокусирано на оптимизацију постојећих решења, уз стварање нових, побољшаних решења, заснованих на принципима математичко-стохастичког моделовања, који су били коришћени за различите потребе грађана у тзв. веб окружењу. У самом истраживању креиране су релевантне процедуре за ефикасан рад у прикупљању и анализи података унутар информационог система еУправе Републике Србије, са посебним освртом на актуелне податке прикупљене током пандемије изазване болешћу COVID-19. С тим у вези, развој оваквих ефикасних процедура заснован је на строгим, математичко-формалним принципима, који омогућавају успешно препознавање могућих „скривених“ правила и њихову примену у решавању датог проблема. Развој оваквих модела пратила је и њихова софтверска имплементација кроз решавање низа практичних, актуелних проблема са којима се свакодневно сусретала електронска управа (еУправа) државних органа Републике Србије кроз своје колаборативне веб сервисе. Практично унапређење постојећих веб сервиса са аспекта статистичке анализе извршено је управо коришћењем принципа стохастичког моделовања, као и вишекритеријумских модела за оцену критеријума у којима се користе различите методе међу којима и метода агрегације. Развијени математичко-стохастички модели били су примењени у области успешног функционисања веб сервиса (нпр. веб сервис за имунизацију). Добијена решења колаборативних веб сервиса примењена су и на мобилним платформама, на пример, у обезбеђивању ефикасности тзв. СОС система за угрожене групе грађана; за решавање проблема праћења и анализе различитих (нпр. популационих, епидемиолошких и др.) трендова у Републици Србији као и за друге потребе.

Кључне речи: колаборативни веб сервиси; еУправа; систем за имунизацију; COVID-19; математичко-стохастички модели; оптимизација

Научна област: Математика; Рачунарство и информатика

Ужа научна област: Примењена математика; Софтверско инжењерство

Dissertation title: "Optimization of mathematical models for security logistics and efficient decision-making in collaborative WEB services of electronic government of the Republic of Serbia"

Abstract: The ubiquitous use of information and communication technologies (ICT) and the global networking of people and resources has led to rapid and often unpredictable changes in every segment of people's lives, work and activities. Such rapid changes occur, first of all, as a consequence of the increasing influence and dominance of the IT society. Namely, in almost all aspects of human action, as well as his environment as a whole, a modern approach to the management of human activities is required. Therefore, the use of a huge amount of data and information, as a basic decision-making factor, must be such that at the same time it is possible to take into account knowledge as a key element, which can only be reached by using modern ICT, that is, within efficiently organized information systems. The implementation of electronic WEB services plays a particularly important role in the life and further development of such a digital society. The scientific research in the proposed dissertation is focused on the optimization of existing solutions, along with the creation of new, improved solutions, based on the principles of mathematical-stochastic modeling, which were used for various needs of citizens in the so-called web environment. In the research itself, relevant procedures were created for efficient work in collecting and analyzing data within the eGovernment information system of the Republic of Serbia, with special reference to current data collected during the pandemic caused by the COVID-19 disease. In this regard, the development of such efficient procedures is based on strict, mathematical and formal principles, which enabled the successful recognition of possible "hidden" rules and their application in solving the given problem. The development of such models was accompanied by their software implementation through solving a number of practical, current problems that the Electronic Government (e Government) of state bodies of the Republic of Serbia encountered daily through their collaborative WEB services. The practical improvement of existing WEB services from the aspect of statistical analysis was carried out precisely by using the principles of stochastic modeling, as well as multi-criteria models for the evaluation of criteria in which different methods are used, including the aggregation method. Developed mathematical-stochastic models were applied in the field of successful functioning of WEB services (e.g., WEB service for immunization). The obtained solutions of collaborative WEB services were also applied on mobile platforms, for example, in ensuring the efficiency of the so-called SOS system for vulnerable groups of citizens; for solving the problem of monitoring and analyzing various (e.g., population, epidemiological, etc.) trends in the Republic of Serbia, as well as for other needs.

Keywords: collaborative web services; eGovernment; immunization system; COVID-19; mathematical-stochastic models; optimization

Scientific field: Mathematics; Computer science and Information Technology

Scientific subfield: Applied mathematics; Software engineering

- С А Д Р Ж А Ј -

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА.....	VIII
СПИСАК ТАБЕЛА	X
СПИСАК СЛИКА	XI
1 УВОД.....	1
1.1 ПРЕДМЕТ И ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА.....	1
1.2 МЕТОДЕ ИСТРАЖИВАЊА	3
1.3 ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ	3
1.4 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ.....	4
1.4.1 Прикупљање и анализа података	5
1.4.2 Структура и организација података	6
2 КОЛАБОРАТИВНИ ВЕБ СЕРВИСИ У ЕУПРАВИ	9
2.1 ИНФОРМАЦИОНО-КОМУНИКАЦИОНА ЛОГИСТИКА ПОРТАЛА ЕУПРАВА	11
2.2 РАЗВОЈ ЕУПРАВЕ У РЕПУБЛИЦИ СРБИЈИ	15
2.3 КОЛАБОРАТИВНИ ВЕБ СЕРВИСИ	19
2.3.1 Модели комуникације у еУправи	23
2.3.2 Веб сервиси на порталу еУправа	24
3 СИСТЕМ ЗА ИМУНИЗАЦИЈУ ПРОТИВ БОЛЕСТИ COVID-19	35
3.1 ДИЈАГНОЗА ВИРУСА SARS-CoV-2	38
3.1.1 Вакцине против болести COVID-19.....	39
3.1.2 Оперативни план за масовну имунизацију становништва	44
3.2 ИНФОРМАЦИОНИ СИСТЕМ КАО ПОДРШКА ИМУНИЗАЦИЈИ.....	51
3.2.1 Праћење вакцина	53
3.2.2 Евидентирање вакцинисаних грађана	60
3.3 ПОДСИСТЕМ ЗА ИСКАЗИВАЊЕ ИНТЕРЕСОВАЊА ГРАЂАНА ЗА ВАКЦИНИСАЊЕ ПРОТИВ COVID-19.....	64
3.4 ПОДСИСТЕМ ЗА ЗАКАЗИВАЊЕ ТЕРМИНА ЗА ВАКЦИНИСАЊЕ ПРОТИВ COVID-19	71
4 МАТЕМАТИЧКО-СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ	75
4.1 ПОЈАМ МОДЕЛА, СИМУЛАЦИЈА И МОДЕЛОВАЊА	75
4.1.1 Моделовање и симулација	75
4.1.2 Математички модели	77
4.1.3 Детерминистички и стохастички модели	79
4.2 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ	81
4.3 ТЕОРИЈСКЕ РАСПОДЕЛЕ ДИСТРИБУЦИЈЕ ФРЕКВЕНЦИЈА	83

4.3.1	<i>Основни параметри расподеле.....</i>	84
4.3.2	<i>Карактеристичне функције</i>	88
4.3.3	<i>Конвергенције низова случајних променљивих.....</i>	89
4.3.4	<i>Неки модели стохастичких расподела.....</i>	91
4.4	ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И МЕТОДИ СТАТИСТИЧКЕ АНАЛИЗЕ.....	97
4.4.1	<i>Статистика узорка</i>	99
4.4.2	<i>Оцене параметара.....</i>	101
4.5	СЛУЧАЈНИ (СТОХАСТИЧКИ) ПРОЦЕСИ.....	106
4.5.1	<i>Расподела и основне карактеристике случајних процеса.....</i>	108
4.5.2	<i>Линеарни модели временских серија.....</i>	111
4.5.3	<i>Нелинеарни (STOPBREAK) модел</i>	117
5	ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ИСТРАЖИВАЊА – СТУДИЈЕ СЛУЧАЈА.....	121
5.1	ПРИМЕНЕ МОДЕЛА РЕГРЕСИОНЕ И КОРЕЛАЦИОНЕ АНАЛИЗЕ НАД ПОДАЦИМА У СЕРВИСУ COVID-19	121
5.1.1	<i>Основни појмови и принципи регресионе анализе.....</i>	122
5.1.2	<i>Метод најмањих квадрата</i>	124
5.1.3	<i>Линеарни и експоненцијални регресиони модел.....</i>	127
5.1.4	<i>Логистички регресиони модели.....</i>	128
5.2	ПРИМЕНА НЕЛИНЕАРНИХ СТОХАСТИЧКИХ МОДЕЛА У АНАЛИЗИ ДИНАМИКЕ И СТЕПЕНА ИМУНИЗАЦИЈЕ	133
5.2.1	<i>Стохастичка расподела GSB процеса</i>	134
5.2.2	<i>Оцене параметара GSB процеса.....</i>	140
5.2.3	<i>Примена GSB процеса</i>	144
5.3	ПРИМЕНЕ МОДЕЛА ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКОГ ОДЛУЧИВАЊА У ОДАБИРУ ПУНКТА ЗА ИМУНИЗАЦИЈУ.....	147
5.3.1	<i>Метод аналитичког хијерархијског процеса (АНР метод)</i>	148
5.3.2	<i>Метод ентропије.....</i>	154
5.3.3	<i>Метод агрегације у одређивању пондера.....</i>	154
5.3.4	<i>Модел стратешког планирања.....</i>	156
5.4	СТУДИЈА СЛУЧАЈА ПРИМЕНЕ МОБИЛНЕ ПЛАТФОРМЕ ЗА ПОВЕЋАЊЕ БЕЗБЕДНОСТИ ГРАЂАНА У БОРБИ СА ВИРУСОМ	163
5.4.1	<i>Техничко решење мобилне платформе за апликацију SOSerbia</i>	165
5.4.2	<i>Имплементација мобилне платформе за систем надзора над COVID-19.....</i>	171
6	ЗАКЉУЧАК.....	174

7	ЛИТЕРАТУРА.....	177
7.1	АУТОРСКИ РАДОВИ.....	185

СПИСАК СКРАЋЕНИЦА

2FA	Двофакторска аутентификација (енг. <i>Two Factor Authentication</i>)
АНР	Аналитички хијерархијски процес (енг. <i>Analytical Hierarchy Process</i>)
ANP	Аналитички мрежни процес (енг. <i>Analytical Network Process – ANP</i>)
AR модел	Модел ауторегресије (енг. <i>AutoRegressive model</i>)
BFC	Сертификација повољног пословног окружења (енг. <i>Business Friendly Certification – BFC</i>)
CoV	Вирус корона (енг. <i>CoronaVirus</i>)
COVID-19	Пандемија коронавирусне болести 2019
DSS	Системи за подршку одлучивању (енг. <i>Decision Support Systems</i>)
FUCOM	Метод пуне конзистенције (енг. <i>Full Consistency Method – FUCOM</i>)
G2B	Управа ка предузећу (енг. <i>Government to Business</i>)
G2C	Управа ка грађанима (енг. <i>Government to Citizen</i>)
G2E	Управа ка запосленима (енг. <i>Government to Employees</i>)
G2G	Управа ка управи (енг. <i>Government to Government</i>)
GL модел	Уопштени логистички (регресиони) модел (енг. <i>Generalized Logistic model</i>)
GSB процес	Уопштени STOPBREAK процес (енг. <i>Generalized STOPBREAK process</i>)
GUI	Графички кориснички интерфејс (енг. <i>Graphical User Interface</i>)
LBFC	Локални процес сертификације повољног пословног окружења (енг. <i>Local Business Friendly Certification – LBFC</i>)
MCDM	Вишекритеријумски метод одлучивања (енг. <i>Multi Criteria Decision Making</i>)
QR	Брзи одзив (енг. <i>Quick Response</i>)
RDF	Стандардни оквир описа ресурса (енг. <i>Resource Description Framework</i>)
RPC	Позив удаљене процедуре (енг. <i>Remote Procedure Calls</i>)
SARS-CoV-2	Тешки акутни респираторни синдром вирус корона 2 (енг. <i>Severe Acute Respiratory Syndrome CoronaVirus 2</i>)
Split-BREAK	„Подељени“ STOPBREAK процес (енг. <i>Split BREAKING process</i>)
Split-MA	„Подељени“ МА процес (енг. <i>Split Moving Average process</i>)
STOPBREAK	Стохастички процес са перманентним флукуацијама (енг. <i>Stochastic Permanent BREAKing process</i>)
UDDI	Универзално описивање, откривање и интеграција (енг. <i>Universal Description, Discovery and Integration</i>)
UNDP	Програм Уједињених нација за развој (енг. <i>United Nations Development Programme</i>)
URI	Јединствени идентификатор ресурса (енг. <i>Uniform Resource Identifier</i>)

W3C	WWW конзорцијум
WSDL	Језик који описују веб услуге (енг. <i>Web Service Definition Language</i>)
YAML	Језик за серилизацију података (енг. <i>Yet Another Markup Language</i>)
ARMA модел	Комбиновани модел ауторегресије и покретних просека (енг. <i>AutoRegressive Moving Average model</i>)
АЛИМС	Агенције за лекове и медицинска средства
БПМН	(енг. <i>Business Process Modeling Notation – BPMN</i>)
ERP	Планирање ресурса у корпорацијама (енг. <i>Enterprise Resource Planning</i>)
еЗУП	Информациони систем за размену података
еИД	Електронска идентификација
ЕМА	Европска агенција за лекове (енг. <i>European Medicines Agency</i>)
ЈЛС	Јединица локалне самоуправе
ЛЕР	Локални економски развој
ЛПА	Локална пореска администрација
МА модел	Модел покретних просека (енг. <i>Moving Average model</i>)
МВ метод	Метод максималне веродостојности
НАЛЕД	Национална алијанса за локални економски развој
ПИО	Пензионо и инвалидско осигурање
ПЦР	Реакција ланчаног умножавања (енг. <i>Polymerase Chain Reaction – PCR</i>)
РГЗ	Републички геодетски завод
РФЗО	Републички фонд за здравствено осигурање
СЗО	Светска здравствена организација (енг. <i>World Health Organization</i>)
СПО	Системи за подршку одлучивању
ЦРОСО	Централни регистар обавезног социјалног осигурања

СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 3.1. Поређење карактеристика доступних вакцина против COVID-19 у Републици Србији.....	43
Табела 3.2. Оперативни план имунизације становништва против COVID-19 у Републици Србији.....	46
Табела 3.3. Статистички показатељи броја вакцинисаних лица (период 24.12.2020 - 06.06.2022.).....	74
Табела 5.1. Итеративни поступак одређивања горње асимптоте ГЛ функције	132
Табела 5.2. Основни статистички показатељи моделованих вредности низова GSB процеса	145
Табела 5.3. Оцењене вредности параметара GSB процеса	146
Табела 5.4. Критеријуми са подкритеријумима за циљ одабира најповољнијег пункта	150
Табела 5.5. Скала релативног значаја критеријума по Сатијевој скали.....	151
Табела 5.6. Поређење парова критеријума	152
Табела 5.7. Матрица поређења критеријума	152
Табела 5.8. Ниво испуњења критеријума у општинама у којима је истраживање спроведено по ВФС програму.....	158
Табела 5.9. Парно поређење критеријума.....	159
Табела 5.10. Релативна важност критеријума одређених помоћу субјективног приступа употребом АНР и објективног приступа употребом ентропијске методе.....	160
Табела 5.11. Релативна важност критеријума одређена агрегацијом (а) и агрегацијом (b)	161
Табела 5.12. Укупан збир вредности елемената по колонама	161
Табела 5.13. Вредности елемената након дељења са збиром	161
Табела 5.14. Укупан збир вредности елемената по колона.....	162
Табела 5.15. Релативна важност критеријума помоћу субјективног и помоћу објективног приступа за избор најповољнијег пункта.....	162
Табела 5.16. Релативна важност критеријума одређена агрегацијом (а) и агрегацијом (b) за избор најповољнијег пункта	163

СПИСАК СЛИКА

Слика 1.1. Основни модел прикупљања података	5
Слика 1.2. Основна подручја за стварање науке о подацима.....	7
Слика 2.1. Шематски приказ општег циља и посебних циљева еУправе.....	17
Слика 2.2. Четворослојна архитектура еУправе	22
Слика 2.3. Почетна страна Портала еУправа	25
Слика 2.4. Веб сервиси груписани у различите животне догађаје.....	25
Слика 2.5. Електронски формулар за регистрацију на Порталу за електронску идентификацију (еИД)	27
Слика 2.6. Пријава на Портал еУправа	28
Слика 2.7. Страница Пријава корисничким именом и лозинком на Порталу еУправа.....	28
Слика 2.8. Софтвер за пријаву електронским сертификатом на Порталу еУправа.....	29
Слика 2.9. Дијаграм случаја коришћења апликације ConsentID за пријаву на тренутним порталима.....	30
Слика 2.10. Апликација ConsentID за пријаву на Портал еУправа	31
Слика 2.11. Дијаграм активности пријаве преко апликације ConsentID	32
Слика 2.12. Дијаграм случаја коришћења једне од нотификација на Порталу еУправа.....	33
Слика 2.13. Пример информација о одабраној услузи	34
Слика 3.1. Снимак плућа без вируса (лево) и са вирусом SARS-CoV-2 (десно)	36
Слика 3.2. Брзина преноса инфекције без друштвене дистанце и са друштвеном дистанцом.....	37
Слика 3.3. Тип и статус вакцина које се развијају против болести COVID-19.....	41
Слика 3.4. Пример Сертификата анализе који издаје АЛИМС	42
Слика 3.5. Бочица вакцине против болести COVID-19.....	42
Слика 3.6. Кутија за транспортовање вакцине Sputnik V.....	43
Слика 3.7. Избор врсте вакцина грађана Србије	44
Слика 3.8. Организација пункта за масовну имунизацију – хала 3 Београдског сајма	46
Слика 3.9. Опис процеса имунизације у БПМН нотацији.....	47

Слика 3.10. Сагласност за спровођење препоручене имунизације са очитаним QR кодом преко мобилног уређаја	48
Слика 3.11. Пункт за масовну вакцинацију – хала 11 Београдског сајма, сектор у којем лекари узимају анамнезу	48
Слика 3.12. Пункт за масовну вакцинацију – хала 3 Београдског сајма, регистрација грађана у Информационом систему који служи као подршка имунизацији против COVID-19	49
Слика 3.13. Потврда о извршеној вакцинацији против COVID-19	50
Слика 3.14. Пункт за масовну вакцинацију – хала 11 Београдског сајма, сектор у којем медицинске сестре дају вакцине.....	50
Слика 3.15. Пункт за масовну вакцинацију – хала 11 Београдског сајма, сектор у којем се грађани задржавају петнаест минута ради праћења евентуалних нежељених ефеката вакцинације	51
Слика 3.16. Три подсистема Информационог система као подршка имунизацији против COVID-19 у Републици Србији.....	52
Слика 3.17. Модел података/информација у апликацији еВакцина.....	52
Слика 3.18. Почетна страна апликације еВакцина након успешне пријаве корисника	53
Слика 3.19. Дијаграм случаја коришћења на почетној страни апликације еВакцина.....	54
Слика 3.20. Дијаграм случаја коришћења на почетној страни апликације еМагацин	54
Слика 3.21. Додавање новог магацина и увид у постојеће магацине.....	55
Слика 3.22. Дијалог прозор за увид у пријеме вакцина на чекању	56
Слика 3.23. Дијалог прозор за управљање излазима из магацина установе ..	56
Слика 3.24. Дијалог прозор за унос нових утрошака и увид у евидентиране утрошке у апликацији еВакцина.....	58
Слика 3.25. Прва страница Контролног центра у апликацији еВакцина.....	58
Слика 3.26. Друга страница Контролног центра у апликацији еВакцина	59
Слика 3.27. Трећа страница Контролног центра у апликацији еВакцина	59
Слика 3.28. Трећа страница Контролног центра у апликацији еВакцина	60
Слика 3.29. Праћење стања централних магацина у Контролном центру апликације еВакцина.....	60
Слика 3.30. Електронска услуга добијања Дигиталног зеленог сертификата на Порталу еУправа	61

Слика 3.31. Дијаграм случаја коришћења на почетној страни функционалности Вакцинације у апликацији еВакцина	61
Слика 3.32. Дигитални зелени сертификат – потврда о извршеној вакцинацији против COVID-19 и резултатима тестирања	62
Слика 3.33. Дијалог прозор за унос новог лица у апликацију еВакцина.....	62
Слика 3.34. Дијаграм случаја коришћења апликације за унос новог лица....	62
Слика 3.35. Прозор са подацима о лицу које се по први пут уписује у апликацију еВакцина	63
Слика 3.36. Дијалог прозор за претрагу лица у апликацији еВакцина	64
Слика 3.37. Модел података/информација у подсистему за Исказивање интересовања за вакцинацију против COVID-19.....	64
Слика 3.38. Почетна страна Портала ЦРОСО	65
Слика 3.39. Избор групе услуга COVID-19 са почетне страна Портала еУправа.....	66
Слика 3.40. Избор услуге Исказивање интересовања за вакцинисање преко Портала еУправа.....	67
Слика 3.41. Исказивање интересовања за вакцинисање против COVID-19..	67
Слика 3.42. Упитник за исказивање интересовања за вакцинисање против COVID-19 на Порталу еУправа	69
Слика 3.43. Последњи корак у исказивању интересовања за вакцинисање против COVID-19 преко Портала еУправа.....	69
Слика 3.44. СМС порука која аутоматски долази након исказивања интересовања грађана за вакцинисање против COVID-19 на Порталу еУправа .	70
Слика 3.45. Обавештење о исказаном интересовању послато на имејл корисника	70
Слика 3.46. Модел података/информација у подсистему за заказивање термина за вакцинисање против COVID-19	71
Слика 3.47. Секвенцијални дијаграм тока захтева кроз еЗаказивање	72
Слика 3.48. Пример извештаја из Информационог система као подршка имунизацији против COVID-19	73
Слика 3.49. Извештај о броју вакцинисаних по узрасту у Информационом систему као подршка имунизацији против COVID-19 (приказан је узраст од 46 до 55 година старости).....	73
Слика 3.50. Поларни дијаграм броја вакцинисаног становништва по месецима.....	74

Слика 4.1. Релациони однос између реалног система, модела и његове симулације на рачунару	76
Слика 4.2. Изградња и провера ваљаности математичког модела	78
Слика 4.3 Модел биномне расподеле	92
Слика 4.4. Густина нормалне расподеле	93
Слика 4.5. Густине χ^2 расподеле	96
Слика 4.6. Репрезентативност узорка.....	99
Слика 4.7. Графички приказ функције веродостојности.....	104
Слика 4.8. Трајекторије случајног процеса	107
Слика 4.9. Типична реализација белог шума (лево) и његова расподела (десно).....	109
Слика 4.10. Типична реализација (лево) и график прве корелација (десно) МА(1) процеса: $X_t = 0,25\varepsilon_t + 0,55\varepsilon_{t-1}$	112
Слика 4.11. Типична реализација (лево) и график корелационе функције (десно) АР(1) процеса: $X_t = 0,5 X_{t-1} + \varepsilon_t$ ($\sigma^2 = 1$)	115
Слика 4.12. Реализација ARMA(1,1) процеса: $X_t - 0,25X_{t-1} = \varepsilon_t + 0,35\varepsilon_{t-1}$	117
Слика 4.13. Графички приказ реализација основних серија GSB процеса....	120
Слика 5.1. Различити функционални облици регресионе зависности	123
Слика 5.2. Полиномијални регресиони модел зависности броја инфицираног у односу на број вакцинисаног становништва (период 14.01 – 29.06.2021).....	126
Слика 5.3. Експоненцијални регресиони модел зависности броја инфицираног становништва у односу на број вакцинисаних (период 30.03 – 29.06.2021)	128
Слика 5.4. График логистичке (S) функције	129
Слика 5.5. Примена ГЛ функција у моделовању и предикцији укупног броја случајева инфекције вирусом SARS-CoV2.....	129
Слика 5.6. Графички приказ ГЛ функција за различите вредности параметара.....	130
Слика 5.7. Формирање линеарног регресионог модела (слика лево) на основу којег се формира ГЛ модел укупног броја вакцинисаног становништва (слика десно).....	133
Слика 5.8. Графички приказ конвергенције реалних и имагинарних делова карактеристичних функција $\varphi_m(u, t)$ и $\varphi_y(u, t)$	138
Слика 5.9. Динамика броја вакцинисаног становништва (лево) и регресиона анализа у оцењивању параметара GSB процеса (десно)	144

Слика 5.10. Упоредни графикони реализација емпиријских и моделираних података: лог-волумена и мартигалних просека (лево), односно Split-MA(1) процеса и белог шума (десно)	147
Слика 5.11. АНР хијерархија проблема за циљ одабира најповољнијег пункта за масовну имунизацију	150
Слика 5.12. Графички приказ важности критеријума за одлучивање по различитим вредностима	162
Слика 5.13. Графички приказ важности критеријума за одлучивање по вредностима агрегације	163
Слика 5.14. Архитектура клијентске Андроид апликације SOSerbia.....	167
Слика 5.15. Пример СОС хитне поруке са локацијом корисника	170
Слика 5.16. Модификација мобилне платформе апликације SOSerbia за потребе система надзора над пандемијом болести COVID-19.....	172
Слика 5.17. Тест самопроцене симптома вируса на мобилној платформи....	173

1 УВОД

У овом раду разматрани су развој и унапређење постојећих, као и стварање нових, оригиналних стохастичко-математичких модела, заснованих, пре свега, на стохастичком моделовању, статистичкој анализи и вишекритеријумском одлучивању, којима би се повећала ефикасност и сигурност у функционисању и раду најразличитијих облика сложених информационих система. Такође, предложена је и практична имплементација остварених теоријских решења, а ради унапређења безбедности веб сервиса електронске управе (еУправе) Републике Србије.

На самом почетку биће описани предмет и циљ истраживања, затим примењене методе истраживања и остварени резултати. Како су у основи целокупног истраживања обрада и моделовање података, у последњем одељку овог уводног дела изложен је кратак осврт на основне појмове и термине који се користе и односе на тзв. *науку о подацима (енгл. Data Science)*.

1.1 ПРЕДМЕТ И ЦИЉ ИСТРАЖИВАЊА

Развој људског друштва у 21. веку карактерише свеprisутна глобализација, са брзим и често непредвидим променама у сваком сегменту живота, рада и деловања људи. Овакве рапидне промене настају, пре свега, као последица све већег утицаја и доминације информатичког друштва. Наиме, у готово свим аспектима човековог деловања, као и његовог окружења у целини, захтева се савремен приступ управљању људским активностима, где је безбедност таквог деловања од посебног значаја. Тако ефикасно руковођење ресурсима све сложенијих и моћнијих система, како у физичком (материјалном), тако и у сајбер (дигиталном) простору, подразумева могућност да се у сваком тренутку доносе исправне и ефикасне одлуке. Ово је могуће само ако постоји реална могућност за прикупљање, обраду и коришћење великог броја информација и знања уопште, које се временом акумулира у самом информационом систему. Дакле, коришћење огромне количине података и информација, као основног фактора одлучивања, мора бити такво да је у исто време могуће узети у обзир и знање као кључни елемент, а до кога је могуће доћи само коришћењем савремених информационо-комуникационих технологија, односно унутар ефикасно организованих, на рачунарима заснованих, информационих система, који су у својој основи засновани на принципима вештачке интелигенције.

Управо из тих разлога предмет научног истраживања у оквиру ове докторске дисертације је оптимизација постојећих решења, али и стварање нових, побољшаних решења, заснованих на принципима математичко-стохастичког моделовања. Ови модели су

даље коришћени у сврху формирања одговарајућих статистичких модела као подршке у процесу евентуалног одлучивања и кодирања података. На овај начин се истовремено обезбеђује и повећање степена одговарајућих безбедносних аспеката самих података, уз софтверску, практичну имплементацију добијених решења. Главни циљ истраживања је био испитивање могућности коришћења предложених модела у решавању практичних, актуелних проблема са којима се свакодневно сусрећу корисници колаборативних веб сервиса еУправе Републике Србије. У том смислу, посебно су разматрани и анализирани следећи аспекти:

1. примена модела регресионе и корелационе анализе;
2. примена нелинеарних стохастичких модела;
3. примена модела вишекритеријумског одлучивања;
4. примена мобилне платформе за повећање безбедности.

С друге стране, још један од циљева истраживања у овом раду био је проналажење релевантних процедура за ефикаснији рад у анализи података унутар информационог система еУправе Републике Србије, са посебним освртом на актуелне податке прикупљене током пандемије изазване вирусом корона. С тим у вези, развој оваквих ефикасних процедура мора бити заснован на строгим, математичко-формалним принципима, који ће омогућити успешно препознавање могућих „скривених“ правила и њихову примену у решавању датих проблема, како са становишта статистичке анализе, тако и са становишта подизања свести о заштити људи. Управо зато су у оквиру овог истраживања постављени и додатни циљеви дефинисани као:

- практично унапређење сервиса са аспекта статистичке анализе, коришћењем принципа стохастичког моделовања, као и вишекритеријумских модела за оцену критеријума у којима се користе тзв. методи агрегације;
- модификација постојећих сервиса на мобилној платформи за повећање безбедности људи у ванредним ситуацијама, тј. израда софтверског решења у виду апликације која се може користити на савременим мобилним уређајима за већину данашњих савремених уређаја;
- испитивање примене развијених модела на различите области човекових делатности, што ће бити један од основних показатеља њихове универзалности и применљивости, преваходно као подршка имунизацији у борби против болести COVID-19.

1.2 METODE ISTRAŽIVAŃA

У складу са образложеном темом, предметом и циљем истраживања, у самом раду се користи широког спектар најразличитијих метода истраживања. Основни метод истраживања заснован је на примени основних, важних савремених теоријских и практичних резултата у областима примењене математике и рачунарских наука. То се, пре свега, односи на сакупљање и проучавање доступне литературе, њену анализу и систематизацију како би се указало на потребу, оправданост и корисност развоја математичко-стохастичких модела, примене вишекритеријумских модела у процесу оптимизације одлука намењених логистичкој подршци у различитим веб сервисима. Затим је коришћен и експериментални рад, првенствено на примеру сервиса за имунизацију, који се огледа у применама претходно развијених математичко-стохастичких модела у области успешног функционисања веб сервиса, односно доношењу ефикасних одлука, као основног показатеља универзалности примене предложене логистике. Самим тим, као најзначајније научне методе у раду су коришћене:

- методе статистичке обраде и анализе података;
- методе и техника експлораторне анализе;
- методе засноване на теорији одлучивања;
- методе за имплементацију савремених софтверских технологија;
- методе студије случаја.

1.3 ОСТВАРЕНИ РЕЗУЛТАТИ

Резултати истраживања описаног у овом раду директно проистичу из претходно наведених предмета и циљева истраживања. Основни резултат представља креирање математичко-стохастичких модела за анализу трендова, односно примена могућих оптимизација и решења у области одлучивања. На основу тога се очекује у будућности и практична имплементација добијених модела, односно развој и формирање ефикасних, оптимизованих софтверских процедура, као основних идејних решења намењених успешном функционисању јавних информационих система, односно веб сервиса еУправе Републике Србије.

У оквиру самог истраживања, а полазећи од постављених задатака истраживања, остварени су следећи резултати:

- извршено је практично унапређење сервиса са аспекта статистичке анализе, коришћењем принципа стохастичког моделовања, као и вишекритеријумских модела за оцену критеријума у којима се користе тзв. методи агрегације;

- извршена је модификација сервиса на мобилној платформи за повећање безбедности људи у ванредним ситуацијама, тј. имплементирана су софтверска решења са једноставним и лако доступним апликацијама за већину данашњих савремених уређаја;
- развијени су разноврсни математичко-стохастички модели са аспеката различитих области људских делатности, пре свега као подршка имунизацији у борби против болести COVID-19 у Републици Србији.

На крају, резултати добијени у спроведеном истраживању указују да се предложени модели могу ефикасно имплементирати унутар важних, садашњих али и будућих, информационо-колаборативних веб сервиса еУправе. Тиме би се, с једне стране, значајно побољшала и унапредила ефикасност ових сервиса, а с друге стране, повећала сигурност лица која их користе.

1.4 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Пре него што правилно опишемо и истражимо информације, интелигенцију и анализу у теоријском и практичном смислу, морамо дати неке основне појмове и термине заједно са њиховом интерпретацијом, који ће омогућити разумевање шта ови појмови суштински значе. Уобичајена дефиниција три основна кључна појма везана за тзв. *аналитику података* јесу (Стојановић, В., 2022):

- *Информације*, које представљају знање у основном, тзв. сировом облику.
- *Интелигенција* указује на информације које се могу разумети, као и информације са додатом вредношћу које су оцењене у односу на њихов извор и поузданост.
- *Анализа* (информација или података) која омогућава:
 - решавање или раздвајање свих информација и чињеница на мање, саставне делове;
 - утврђивање свих саставних делова који су од значаја, тј. релевантни за тумачење одређене информације;
 - утврђивање извора одређене информације како би се открили општи принципи који стоје иза њих;
 - прегледан приказ резултата аналитичког процеса.

Правилно разумевање разлике између ових израза и начина на који они међусобно делују јесте веома важно. Међутим, чак и у овој раној фази, ове дефиниције указују на кључне разлике. Информације су прилично једноставни, сирови подаци било које врсте. За

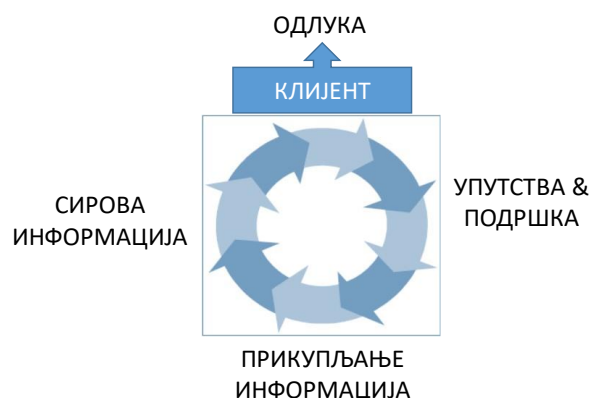
разлику од њих, интелигенција указује да се над датим подацима радило, као и да им је дата одређена додатна вредност и одређени квалитативни значај. Дакле, важи следеће правило:

ИНФОРМАЦИЈА + ЕВАЛУАЦИЈА = ИНТЕЛИГЕНЦИЈА

Начин на који се ова трансформација врши јесте *евалуација*, тј. процес разматрања информација с обзиром на њихов контекст кроз њихов извор и поузданост. У свом најједноставнијем облику аналитика података односи се на прикупљање и коришћење информација, као и њихову процену како би се прерађивала у податке на основу којих је могуће извршити њихову анализу. На тај начин се добијају тзв. *аналитички производи* који омогућавају доношење одлука на основу опсервираних и анализираних информација.

1.4.1 Прикупљање и анализа података

Знање има потенцијал да се изједначи са моћи. Концепти прикупљања и коришћења информација за подршку одлучивању, са формалног становишта, познати су већ одавно, у знатно ранијим временским периодима. Да би се постигла предност у односу на противнике, неопходно је поседовати најсавременије, тачне информације које се, између осталог, односе на њихове намере и могућности. Ово правило важи у свим областима, било да је то политика, посао, војна стратегија или криминална интелигенција. И поред тога, то је процес који се увек и даље непрекидно развија, као одговор на промене у социјалним и културним факторима, технологији, организационим потребама и новим, вишим нивоима аналитичких вештина. Од ових раних почетака, кроз историју, па до релативно недавних времена, сакупљање информација, првенствено за војне циљеве, био је уобичајени поступак. Штавише, из овог процеса је произашла методологија која је у основи подразумевала директан контакт између сакупљача информација и клијента, тј. доносиоца одлука (Слика 1.1).



Слика 1.1. Основни модел прикупљања података

Овај основни модел прикупљања информација имао је неке битне недостатке, од којих су најзначајнији следећи:

1) „Обична“ логистика која је укључена у поступак прикупљања информација не укључује одговарајуће технологије које су намењене транспорту или комуникацији. Тако се ствара велико кашњење између задатака сакупљања информација, добијања информација и испоруке информација „крајњем кориснику“ (клијенту).

2) Прикупљање података је најчешће обављано непосредно, посетама одређеним локацијама или сведочењима о одређеним догађајима (лично или преко посредника). Овакви поступци нису гарантовали да ће прикупљене информације бити веродостојне, јер су оне бивале ограничене способношћу онога ко добија информацију (рецимо, да је тачно уочио и запамтио све битне детаље који се односе на ту информацију). Стога би такве информације увек биле веома субјективне и темељене на мишљењу, а не на чињеницама.

3) Обим и количина прикупљених информација били би релативно мали у односу на степен уложеног времена и ресурса.

Као што је познато, у данашњем, савременом окружењу информациони системи генеришу огромне количине информација. Самим тим, потпуно разумевање целокупних информација јесте пресудно за ваљано доношење одлука. Стога, упркос томе што постоје многа ограничења, процес прикупљања информација и даље се показује као одлучујући фактор у успеху различитих пословних или политичких стратегија. Масовни раст технологије који је започео тада, а и данас траје, довео је до онога што се показало као масовна промена у методама прикупљања информација, а што је заузврат створило потражњу за новим приступима анализи и трагању за тзв. интелигенцијом унутар података. Ово је створило потребу за новим обликом интеракције између сакупљача информација и клијента, тј. постало је неопходно да се већина информација која се могла примити истовремено одмах евидентира, процењује и испитује.

1.4.2 Структура и организација података

У претходном делу дефинисали смо појам података, односно информација. Ипак, када користимо реч „подаци“, обично их замишљамо као колекцију која може бити у организованом или неорганизованом формату (облику). На основу тога подаци могу бити:

- *Структурирани (организовани) подаци*, који су разврстани по хоризонталним редовима (слоговима) и вертикалним редовима (колонама). Сваки слог обично представља једно посматрање (опсервацију, елемент), док колоне представљају карактеристике тог посматрања. Типичан пример оваквих организованих података јесу *базе података*.

- *Неструктурирани (неорганизовани) подаци* представљају врсту података која се јавља у слободном облику, обично у облику необрађених низова текстуалних, нумеричких или аудио-визуелних сигнала који се морају даље рашчланити како би се организовали.

Један од главних циљева науке о подацима је „стварање *експлицитних практичних модела и поступака* за откривање и примену односа у подацима“ (Ozdemir, 2018). Разумевање науке о подацима започиње са три основна подручја (приказана такође и на Слици 1.2):

- *Математика и статистика*, тј. употреба једначина и формула за анализу података.
- *Рачунарско програмирање*, као способност за употребу кодова и рачунарских алгоритама за стварање резултата на рачунару.
- *Знање домена* се односи на разумевање проблематичног домена (медицина, финансије, друштвене науке итд.).

Дакле, да бисмо стекли знање из података, морамо бити у могућности да користимо рачунарско програмирање за приступ подацима, да разумемо математику која стоји иза модела које изводимо и, пре свега, да разумемо место и улогу наших анализа у домену у коме се налазимо. Притом, нагласимо да пресек математике (статистике) и програмирања представља *учење из података*, област која се нарочито развија у новије време, како се развијају рачунари и софтвери.



Слика 1.2. Основна подручја за стварање науке о подацима

На крају, важно је напоменути да било који модел или резултат аналитичке обраде мора бити заснован на домену, односно практичној примени датог модела. На пример, стварање ефикасног софтвера за дијагностику неке болести није могуће ако програмер притом не користи и примењује стручна мишљења лекара, као и других стручњака из овог домена. Тако ће у овој дисертацији, између осталог, бити речи и о основним методама

прикупљања, обраде и анализе података унутар портала еУправа Републике Србије. У складу са тренутно најактуелнијом, односно највећом пошастом 21. века, епидемијом вируса корона, биће описани различити методи и начини рада над подацима о броју оболелих и вакцинисаних лица на територији Републике Србије. То, пре свега, укључује прикупљање и обраду података, али и коришћење добијених информација за формирање различитих математичко-стохастичких модела и доношење утемељених одлука и предвиђања који се односе на динамичку структуру ове болести.

2 КОЛАБОРАТИВНИ ВЕБ СЕРВИСИ У ЕУПРАВИ

Системи за подршку одлучивању (СПО) дефинишу се као интерактивни информациони системи који кориснику треба да обезбеде подршку у процесу проналажења најповољнијег решења за различите проблеме у вези са одлучивањем (Сукновић, 2010). Изучавање процеса доношења одлуке и система за подршку одлучивању је до данас вршено на најразличитије начине, најпре од стране различитих профила истраживача и практичара који делују у оквиру ове области (Power, 2002), као и истраживања сличних области: вештачка интелигенција, машинско учење, операциона истраживања, организационе науке, управљачки информациони системи, које свака на свој начин чине истраживање СПО богатијим и сложенијим (Панцић & Панцић, 2012).

Истраживање система за подршку одлучивању је значајно еволуирало током седамдесетих и осамдесетих година прошлог века, а СПО су важили за једну од најпопуларнијих области информатичке струке у протеклом периоду. Различити облици СПО су развијени како би се обезбедила подршка доносиоцима одлука на свим организационим нивоима, укључујући системе који омогућавају боље структурирање проблема, управљање операцијама, управљање финансијама, стратешком менаџменту, па чак и пружању подршке у процесу пословне оптимизације. Ипак, интерес за традиционалне облике СПО забележио је значајан пад крајем XX и почетком XXI века, пре свега јер су изоловани, самостални и независни СПО суочени са мноштвом нових изазова. Ови изазови се првенствено односе на следеће аспекте:

1. технологија помера тежиште обраде и анализе података са класичних база података (енг. *Data Bases*) на складиштење података (енг. *Data Warehouse*) и ОЛАП анализу (енг. *On-Line Analsys Processing*), са посебном клијент-сервер архитектуром, и то од модела намењених једном кориснику ка вишеструком интернет приступу;
2. растућа повезаност и интеракција са динамичним пословним окружењем и системима извештавања који представљају делове других информационих система, као што су ЕРП (енг. *Enterprise Resource Planning*) системи, затим системи за управљање ланцима снабдевања (енг. *Suply Chain Management*), као и системи за управљање односима са купцима (енг. *Customer Relationship Management*);
3. повећана сложеност ситуација одлучивања које захтевају огроман когнитивни напор од стране доносиоца одлука, који треба да поседује потребно знање и иницијативу како би успешно извршавао своје активности.

Потенцијално решење за наведене изазове је проширење традиционалног СПО и његово интегрисање са компатибилним модерним технологијама, пословним окружењем и

пословним извештавањем. На овај начин би се обезбедила боља интеракција између доносиоца одлуке и система, не само ради унапређења ефикасности и ефектности донетих одлука него и ради боље сарадње и рада виртуелних тимова. С обзиром на то да постоји јавна критика усмерена ка независним СПО и да је призната потреба за његовом повезивањем са пословним извештавањем и модерним технологијама, многи истраживачи су почели да испитују различите могућности интеграције. Од тада ради се на увођењу нових концепата, оквира и архитектура технолошки интегрисаних система за подршку одлучивању (Чупић & Сукновић, 2010).

Почетком XXI века доминирали су тзв. *системи за подршку одлучивању* (енг. *Decision Support Systems – DSS*) који су еволуирали од тзв. main-frame оријентисаних ДСС система на клијент-сервер архитектуре са клијентима који зависе од других компјутера/клијента (енг. *thin client*) све више на веб ДСС системе (Shim, и други, 2002), (Byung, 2003), (Alvarado & други, 2007), (Kaklauskas, Zavadskas, & Trinkunas, 2007). Ова истраживања се баве могућим архитектурама за интегрисане ДСС базиране на вебу (Chan & други, 2007). У међувремену, сам веб је достигао раст екстремног „базена“ људског знања. Нове социјалне технологије, познате као Веб „људских бића“ или Веб 2.0., семантички Веб 3.0 и најновији Веб 4.0, који има могућности за примену вештачке интелигенције и циљних оптимизација, данас трансформишу веб од дистрибутивне базе података до медија који дозвољавају комуникацију између људи и формирају такозвану колаборативну, интегрисану интелигенцију, која у великој мери доприноси примени ових технологија у многим областима живота, укључујући и подршку при доношењу одлука у еУправи (Ivanov, 2019).

У таквом окружењу, интегрисани ДСС помаже у доношењу одлука чак и када подаци нису потпуни, као и код врло слабо структурисаних или неструктурисаних података и проблема на свим нивоима државних органа и великих корпорација, а посебно су значајни на највишем нивоу управљања. Интеграција у ДСС доводи до тога да су ти системи јако комплексни и имају веома различите начине имплементације. Најчешће, сложеност самог проблема доводи до процеса заснованог на примени тзв. *вишекритеријумског одлучивања* (енг. *Multi Criteria Decision Making – MCDM*), односно до истраживања на основу више атрибута, за које је одређивање важности, као и ефикасности тог одређивања врло важно за доношење исправних одлука. Решавање оваквих проблема јесте један од важних предмета ове дисертације, уз предлог одговарајућих веб сервиса као елемената услуга еУправе Републике Србије.

2.1 ИНФОРМАЦИОНО-КОМУНИКАЦИОНА ЛОГИСТИКА ПОРТАЛА ЕУПРАВА

Информационо-комуникационе технологије и информатичка знања, као и њихове вештине, фундаментално мењају начин на који човек последњих деценија учи, ради, доноси одлуке и комуницира. Брза и ефикасна обрада података и доношење одлука на основу тако обрађених података представљају квантитативну предност употребе информационо-комуникационих технологија у пословању. Међутим, из основа се мења и квалитет пословања јер се јављају нови начини пословног управљања и одлучивања. Интернет је постао најсавршеније средство за комуникацију и интеракцију људи. Повезивањем интернета, информационо-комуникационих и мултимедијалних технологија створена је виртуелна реалност као нови феномен у животу, раду и забави људи.

Поставља се питање „Зашто информационо-комуникационе технологије освајају свет брзином и на начин који су без преседана у историји људског развоја?“. Одговор би могао да гласи: применом ових технологија све се може урадити боље, брже, лакше, обимније и јефтиније, а то су више него довољни разлози за сваког ко рационално размишља и одговорно се понаша да их без резерве прихвати. Транзиција из индустријског у информационо друштво, које се често назива и постиндустријско, одвија се уз померање фокуса са производње материјалних добара ка пружању услуга, уз истовремено креирање и новог амбијента у којем кључни друштвени ресурси на скали друштвених вредности индустријског доба уступају места информацијама, односно знању, који у новом информационом добу постају највише друштвене вредности. У таквом амбијенту, са новонасталим друштвеним вредностима, рађа се и ново учено друштво базирано на знању, а његове водеће социјалне групе постају радници са знањем, којима ће информационо-комуникационе технологије (ИКТ) представљати покретачку снагу за снажно поновно обликовање сваког аспекта социјалног, друштвеног, политичког, културног и економског живота. Дигитална трансформација као последица масовне употребе ИКТ-а је захватила све сегменте друштва, а њени ефекти су бројни, обимни и далекосежни. Велике компаније као и многе владе у свету се реорганизују кроз дигиталну трансформацију како би повећале ефикасност, економичност, продуктивност, побољшале квалитет и доступност производа и услуга, оптимизовале трошкове и унапредиле транспарентност рада и пословања.

Сваки вид тзв. „пословне трансакције“, односно трансакције електронским путем између физичких и правних лица у плаћању, уговарању, преговарању или купопродајним активностима подразумева концепт *електронске трговине* (енг. *e-commerce*). Електронско пословање (енг. *e-business*) је шири појам од електронске трговине, који обухвата, како развој, тако и експлоатацију пословних информационих система у свету електронске

размене података и сервиса путем интернета (Поповић & Кук, 2017). Та особина електронског пословања пружа могућност бројним данашњим компанијама да остваре уштеде у трошковима пословања, као и да своје задатке ефикасније обаве, што их чини конкурентнијим на глобалном тржишту (Consoli & Recupero, 2021).

Данас је електронско пословање путем интернета опште познати појам и нешто без чега се модерно пословање не може ни замислити. У зависности од примене и њиховог утицаја, можемо да споменемо три доминатна основна облика електронског пословања:

1. **еТрговина** (енг. *e-commerce*),
2. **еБанкарство** (енг. *e-banking*),
3. **еУправа** (енг. *e-government*).

Саставни део савременог пословања постаје дигитална трансформација пословања, а успешност њеног спровођења даје меру општег пословног успеха компаније или организације, како у садашњости, тако, још важније, у блиској будућности, која је претежно дефинисана трендовима развоја дигиталних технологија. Чест случај у савременом пословању је да део пословних процеса у организацији буде потпуно ослоњен на дигиталне технологије, док други део наставља традиционално пословање, уз идеју да ова два дела буду компатибилна и комплементарна и да тако обезбеде све предности које пружају дигитално и традиционално пословање. Интернет врши изузетно велики утицај на пословање, посебно у оним срединама где је концентрација паметних уређаја и осталих електронских елемената који чине овај концепт висока и где се на тај начин стварају синергијски ефекти везани за постојање изузетно велике количине података који у реалном времену осликавају догађаје из физичког света. Након што су рачунари постали део свакодневице, већина компанија је почела да претвара различите физичке записе у дигиталне документе. Ово називамо дигитализацијом у ужем смислу: процес претварања информација из аналогних у дигиталне. Предвиђа се да ће дигитално трансформисане компаније или организације стварати више од половине глобалног БДП-а до 2023. године.

Коришћење дигиталних података и докумената постало је вишеструко ефикасније за компаније, али пословни системи и процеси су и даље углавном дизајнирани око навика из аналогне ере које се свODE на то како пронаћи, делити и користити информације. Како су се ИКТ временом развијале, људи су почели да стварају нове идеје за њихову пословну употребу, а не само да би брже радили ствари на „стари начин“. Тако је почела да се обликује идеја дигиталне трансформације. Са развојем нових технологија, одједном су и нови начини пословања постали могући. Дигитална трансформација мења начин пословања и, у неким случајевима, ствара потпуно нове типове компанија. Дигиталном трансформацијом компаније се враћају уназад и преиспитују све што раде, од унутрашњих

система до интеракције са купцима или корисницима. Том приликом, фокус стављају на питање промене у свом начину пословања које ће омогућити боље доношење одлука, већу ефикасност у раду или боље корисничко искуство уз већу персонализацију. Око 55% стартап и 38% традиционалних предузећа је већ усвојило стратегију дигиталног пословања. У оквиру дигиталне трансформације велику улогу има коришћење технологија које стварају додатну вредност и нове типове услуга, иновације и стварање могућности за брзо прилагођавање променљивим пословним околностима. Можемо рећи да код дигиталне трансформације није реч само о технологији, него се ради и о људима, оптимизацијама и способностима за брзо прилагођавање када је то потребно путем интелигентне употребе технологија и информација.

Ова дубока промена пословних и организационих активности, процеса, компетенција и модела се врши како би се у потпуности искористиле промене и могућности разних дигиталних технологија. Развој нових компетенција и вештина усмерава компаније и организације да буду агилније, оријентисане на људе и купце, иновативне, фокусиране, ефикасне и способне да искористе могућности за промену постојећег стања и коришћење нових извора података. Ово су неке од главних предности дигиталне трансформације које могу постати реалност сваке компаније:

- уштеда времена аутоматизацијом мануелних процеса,
- креирање свеобухватне базе података о купцима,
- отпорност пословања на будуће неизвесности или кризне ситуације,
- идентификација визије која води целокупно пословање,
- стављање фокуса на корисничко искуство,
- идентификација свих аспеката организације који успоравају или ометају рад са клијентима,
- рангирање потенцијалне вредности сваке стратегије,
- доношење одлука на основу квалитетних података.

Дигитална трансформација, ИКТ и начини на које их користимо у приватном животу, послу и друштву заувек мењају лице пословања. Укратко речено, дигитална трансформација одавно није само идеја о будућности. Уколико нека компанија или организација имају интерес да успеју или профитирају, неопходност дигиталне трансформације не сме да се доводи у питање. Многе компаније су током протеклих година одлучиле да се не упуштају у овај тренд, међутим, врло брзо су се суочиле са чињеницом да је њихово време прошло и да их је време прегазило. Налазимо се усред дигиталне револуције пословања, где ће напредовати само оне компаније које у потпуности прихватају и улажу у своју дигиталну трансформацију. Јер застарели оперативни модели ометају и

спречавају раст и способност компанија да иду у корак са захтевима купаца и тржишта. Само компаније изграђене на агилним, интелигентним и дигиталним процесима могу да пруже корисничко искуство која надмашује очекивања. Управо, дигитализација представља добру прилику да се иде напред како у самој држави, тако и у привреди па чак и у целом друштву генерално. Као што се може приметити, сам процес дигитализације, пружањем већег броја услуга, ствара и нове могућности за квалитетнији живот грађана, којима су све доступнији знање и информације. Искуства бројних компанија из ИТ сектора су допринела да значај дигитализације у целом друштву има важну функцију целокупног развоја на свим пољима а нарочито у економском.

еУправа (енг. *e-government*) представља пружање услуга јавне управе грађанима и привреди електронским путем. Те услуге се огледају, између осталих, у могућностима регистрације предузећа, приступ електронском катастру или приступ јавним набавкама преко интернета. За саме грађане свакако може да буде најзанимљивија услуга управо доступност различитих информација, као што су, на пример, резултати уписа ученика у основне или средње школе, резултати уписа бруцоша на факултете, бројна обавештења о јавним радовима, провера стања на рачунима, електронско плаћање, обављање изборног система и друго. Међутим, овде треба нагласити да еУправа није само сајт јавне управе на интернету.

Следећа дефиниција објашњава везу између електронског пословања и јавне управе: „...еУправа представља форму електронског пословања владе и односи се на испоруку електронских услуга према различитим циљним групама у јавности, те на пословну сарадњу и трансакције које влада обавља са различитим организационим ентитетима, као што су друге владине службе, агенције или партнери...“ (Тешић & Петровић, 2020). Као што је добро познато, индустрије у бројним земаља се реструктурирају да би се прилагодиле захтевима савременог „дигиталног“ доба и одговорили тренду процеса дигитализације. Институције свих врста се хватају у коштац да на нове изазове одговоре прилагођавањем својих стратегија и активности новим околностима. Дакле, нико не остаје по страни. Илустрације ради, можемо да поменемо само неке примере промена које су настале у областима важним за функционисање друштва са оствареним импресивним ефектима социјално-економске сфере живота друштва, као што су:

1. јавна управа,
2. пословање,
3. научноистраживачки рад,
4. образовање,
5. здравствена заштита.

Веб сервиси еУправе бројних западних влада омогућују својим грађанима следеће услуге:

- изводи из матичних књига,
- лична документација (лична карта, возачка дозвола),
- прибављање држављанства,
- здравствени сервиси (заказивање прегледа и сл.),
- социјална заштита,
- одлазак у пензију (потребна документација),
- могуће услуге еУправе за грађевинарство.

У области која је битна за функционисање привреде, еУправа може обезбедити следеће послове од интереса за предузећа:

- регистрација предузећа,
- пријављивање и одјава радника,
- пореске пријаве,
- достављање података разним службама министарстава,
- сарадња са управом царина.

2.2 РАЗВОЈ ЕУПРАВЕ У РЕПУБЛИЦИ СРБИЈИ

Основни разлози који су подстакли увођење интернета и електронског пословања у органима јавне управе у Републици Србији, како на републичком, тако и на локалном нивоу јесу следећи:

- миграција становништва из мањих у веће градове,
- економска исплативост уз смањење цене услуга добија се смањивањем броја запослених у јавном сектору,
- повећање задовољства грађана јер као пример можемо да скратимо време чекања у редовима испред бројних шалтера, при чему се избегава шетња од једног до другог шалтера,
- повећање задовољство привредних субјеката кроз поспешење комуникација локалне и републичке власти, која се огледа у ефикаснијем управљању документацијом.

Оно што грађани највише замерају јавним службама је: сложеност процедура, чекање у редовима, лоша организација, лоша су упутства, тј. нигде ништа не пише, нељубазност службеника и, посебно, високе таксе. Најзанимљивији одговор, из једне анкете, добијен је на питање да ли би грађани платили неком да им обави неки општински посао. У великој мери су одговорили са „да“, што наводи на неопходну потребу за процесом дигитализације у пословима јавне управе Републике Србије.

Код нас је сарадња републичке владе и локалних самоуправа посебно кренула од 2017. године са развојем информационих система „Бебо, добро дошла на свет“ и „Систем за размену података – еЗУП“. Што се тиче модела намењених пословању, трговини или трансакцијама, они се одвијају повезивањем низа различитих државних органа (или институција) са одређеним пословним субјектима (енг. *Government to Business – G2B*). Услуге еУправе се огледају у оним које су доступне на сајту www.croso.rs или у Регистру административних поступака за привреду www.rap.euprava.gov.rs. На сајту ЦРОСО (Централног регистра обавезног социјалног осигурања) послодавци могу електронским путем, на веома једноставан начин, да пријављују и одјављују раднике. Унапређење електронске управе са процесом дигитализације података у Републици Србији почиње 2004. године, а након усвајања *Стратегије реформе државне управе у Републици Србији* (Влада Републике Србије, 2004) створена је основа за њен даљи развој.

Велики значај у правцу развоја електронске управе дала је Влада Републике Србије, почев од 2017. године, када је дигитализација постала важан приоритет тада новоосноване Владе. Да би то било изводљиво, било је потребно претходно предузети паралелне кораке у правцу брзог развоја услуга електронске управе и примене савремене инфраструктуре, што је пратило доношење битних законских и подзаконских аката у кратком временском периоду. У том смислу, започета реформа огледала се у изради и усвајању *Стратегије реформе јавне управе у Републици Србији* 2014. године („Службени гласник РС“, бр. 9/2014, 42/2014 и 54/2018).

Једно од усвојених поглавља те стратегије било је директно усмерено на повећање ефикасности рада послова органа јавне управе кроз примену савремених информационо-комуникационих система. Основна намена ових система јесте пружање низа јавних услуга, како грађанима, тако и правним лицима. У следећој фази усвојен је документ под називом *Стратегија развоја електронске управе у Републици Србији* за период од 2015. године до 2018. године („Службени гласник РС“, бр. 107/15) намењен промовисању саме електронске управе, и то на националном нивоу. Поред поменутог документа, кроз исту стратегију усваја се и Акциони план за њено спровођење. Једно значајно питање у оквиру Стратегије односи се на безбедност података, и то осетљивих информација о грађанима као субјектима јавне управе као и њихових појединачних трансакција. Управо то је отворило и питање постојања отворених података као посебне категорије у датој стратегији.

Како би се што боље трасирао пут развоја електронске управе и како би се успешно пратиле технологије савременог живота, Република Србија је почетком месеца јуна 2020. године усвојила *Програм развоја електронске управе 2020–2022* („Службени гласник РС“, бр. 85/2020) заједно са одговарајућим Акционим планом намењеног реализацији овог

програма. Овом новом стратегијом предвиђено је да велики број услуга јавне управе буде доступан привреди и грађанима преко интернета и уз употребу мобилних телефона. На овај начин, кроз имплементацију датог програма, Србија је у периоду од две године требало да оствари боље резултате у процесу бржег, ефикаснијег и једноставнијег услуживања својих грађана кроз спровођење скоро 300 нових сервиса за грађане и привреду. Правци развоја ефикасне и кориснички оријентисане електронске управе били су представљени кроз *четири основна циља* (Слика 2.1).



Слика 2.1. Шематски приказ општег циља и посебних циљева еУправе

Сама припрема програма развоја еУправе у периоду од 2020. до 2022. године извршена је синхронизованим радом више државних органа. Највише удела имала је Канцеларија за информационе технологије и електронску управу, као и Министарство државне управе и локалне самоуправе. Израду овог програма подржала је и Европска унија унутар пројекта под називом „Подршка реформи јавне управе у оквиру Секторског реформског уговора за сектор реформе јавне управе“ (Републички секретаријат за јавне политике, 2020), односно Фонд за добру управу Владе Уједињеног Краљевства. Поред наведених међународних институција, подршка програму дата је и од глобалне институције Уједињених нација за развој (енг. *United Nations Development Programme – UNDP*), као и од националних организација, пре свега Националне алијансе за локални економски развој – НАЛЕД.

Развој еУправе био је праћен усвајањем неопходним законских регулатива, па је ту том смислу велику прекретницу представљало ступање на снагу *Закона о електронској управи* у Републици Србији („Службени гласник РС“, бр. 27/2018). Овај правни акт уређује начин на који се обављају послови органа јавне управе коришћењем електронске

комуникације кроз примену савремених информационо-комуникационих технологија, а регулисао је и начин размене података између јавне управе и других јавних државних органа. Треба нагласити да поред споменутог закона постоји и читав низ других законских аката који се делимично баве и питањима из области еУправе, тако да треба очекивати њихова усаглашавања у будућности. Закон о електронској управи, поред предвиђених услуга у електронском пословању, такође омогућава потпуну сигурност, безбедност и висок степен поузданости. Треба напоменути да се у оквиру овог закона утврђују различити поступци идентификације корисника, што повећава поузданост коришћења електронских услуга. Овим законом уведен је и електронски печат за правна лица (једна врста замене својеручног потписа овлашћеног лица или замена за печат), што омогућава повезивање података из различитих институција као и међусобну размену печатираних електронских докумената. Важна одлика тих трансакција јесте могућност за евиденцију времена слања и пријема сваког од размењених докумената. Та особина је веома битна ставка за судске и управне поступке, нарочито код услуга као што је квалификована електронска достава.

Неке од директива Организације за европску безбедност и сарадњу – ОЕБС-а (енг. *Organization for Security and Co-operation in Europe – OSCE*) као и препоруке релевантних стандарда као што је ISO/IEC 27000 обавезују менаџмент државних и приватних органа да имплементирају, унапређују и документују системе информационе безбедности на интернету и у систему електронског пословања. Примена технологија за одржавање информационе безбедности и поверења у електронском окружењу треба да представља практичну примену три донета национална закона:

- **Закон о информационој безбедности** („Службени гласник РС“, бр. 6/2016) донет је 2016. године и њиме се прописују одговарајуће заштитне мере у односу на безбедносне ризике који могу настати унутар информационо-комуникационих (ИК) система. Њиме се такође одређује и одговорност свих правних лица при коришћењу ИК система, као и координација свих елемената и правилна примена свих мера заштите ИК система.
- **Закон о електронском документу** („Службени гласник Републике Србије“, бр. 94/2017) донет је 2017. године и њиме се уређује сам електронски документ, односно идентификација и услуге у електронском пословању.
- **Закон о заштити података о личности** („Службени гласник РС“, бр. 87/2018) донет 2018. године и односи се на начин на који се врши обрада података о личности, начин чувања и ограничења у приступу података о личности, као и поступцима надзора коришћења и извоза података.

Најзначајнија новина у Закону о електронском документу, као што је напоменуто раније, јесте *електронска идентификација*, на основу које се једнозначно одређује правно или физичко лице у електронском облику, односно врши се доказивање дигиталног идентитета лица. Представљене шеме електронске идентификације у Закону пружају гарант да идентификациони подаци у електронском облику одговарају том лицу. Шеме електронске идентификације могу да буду ниског, средњег и високог нивоа заштите, у зависности од ризика злоупотребе и могуће штете. Тако да се у појединим електронским трансакцијама у којима је низак ризик од злоупотребе и настанка штете могу користити шеме електронске идентификације ниског нивоа заштите, чиме би, самим тим, трошкови шеме овог нивоа заштите били нижи и приуштиви за грађане.

Пре него што се услуге еУправе понуде грађанима и привреди, потребно је проћи кроз поступке развоја, тестирања и пуштања у продукцију. Веома значајан посао је свакако промовисање доступних електронских услуга које грађани могу добити преко портала или веб сајта као и сама едукација грађана о неопходности коришћења таквих услуга на интернету. Код нас је требало да прође доста времена како би грађани стекли поверење у услуге еУправе, што је постигнуто развојем масовних услуга попут Бебо, добро дошла на све, еРецепт, еВртић, еУпис, исказивање интересовање за вакцинацију грађана против COVID-19. Зато Портал еУправа представља централно место за обједињавање свих електронских услуга намењених како физичким, тако и правним лицима, али и самим државним органима (Раденковић & други, 2015). Портал или тзв. „електронски шалтер“ је замишљен да ради као додирна тачка еУправе са привредом и грађанима (Вучинић, 2020).

2.3 КОЛАБОРАТИВНИ ВЕБ СЕРВИСИ

Комуникација интернетом је основа рада еУправе и она се може организовати на основу различитих модела комуникације. Веома буран развој интернет технологија нам је омогућио практично свакодневну појаву и примену све више новијих и моћнијих видова комуникација управо путем интернета. Према међународној организацији W3C, веб сервис представља софтверски систем идентификован помоћу јединственог низа знакова (енг. *Uniform Resource Identifier – URI*), чији су јавни интерфејси и везивања дефинисани и помоћу XML-а. Веб сервиси у оквиру еУправе спадају у групу посебно интересантних сервиса који омогућавају колаборацију у раду, тј. чине га колаборативни веб сервиси који омогућавају различитим рачунарима међусобну интеракцију користећи интернет мрежу, придржавајући се уједно одговарајућих стандарда за манипулацију подацима и користећи протоколе комуникације базиране на њима.

Интеграција апликација преко мреже омогућава системима да изложе своју функционалност путем стандардних, интероперабилних интерфејса независних од платформе, језика или оперативног система, при чему се њихове функционалности декомпонују на различите јединице или сервисе. Сами сервиси обављају комуникацију тако што размењују податке или врше координацију својих активности. На тај начин се омогућава коришћење неколико сервиса више пута, и то за различите намене (Поповић & Кук, 2017). Сматра се да је сваки сервис и веб сервис ако је:

- доступан преко интернета или (интерне мреже),
- користи стандардизован систем порука,
- препознатљив је од стране механизма за претрагу,
- није везан за оперативни систем или програмски језик.

Овај задатак веб сервиси скупљени на локацији универзално описивање, откривање и интеграција (енг. *Universal Description, Discovery and Integration – UDDI*) постижу користећи отворене стандарде за:

- креирање формата информација и електронско дељење структурираних података путем интернета, познат под именом прошириви (мета) језик за означавање (енг. *Extensible Markup Language – XML*),
- комуникацију као протокол базиран на XML-у који се користи за слање порука и за процедуре удаљених позива (енг. *Remote Procedure Calls – RPC*), познат под именом једноставан протокол за приступ објектима (енг. *Simple Object Access Protocol – SOAP*),
- језик који описује веб услуге (енг. *Web Service Definition Language – WSDL*).

Са развојем веб технологија развијају се и све новији стандарди за веб сервисе у једном континуираном процесу настојећи да прате свеопшти буран развој информационих и посебно интернет технологија, па темељ Веб 3.0 апликација чини стандард оквир описа ресурса (енг. *Resource Description Framework – RDF*), који доставља средства која су потребна да се повежу подаци из више веб страница или база података, заједно са употребом семантике, познат као једноставан упитни језик за RDF податке (енг. *Simple Protocol and RDF Query Language – SPARQL*), који представља *SQL* стандард за извршавање упита над RDF подацима.

Главни протокол за транспорт података између веб сервиса и клијента је познати HTTP, иако је могуће користити и друге протоколе. Формати за пренос података поред поменутих *XML*-а и *RDF*-а могу бити и други као, на пример, дијалект *XML* или *RSS-XML* (енг. *Really Simple Syndication – RSS*), текстуално базиран отворени стандард дизајниран за

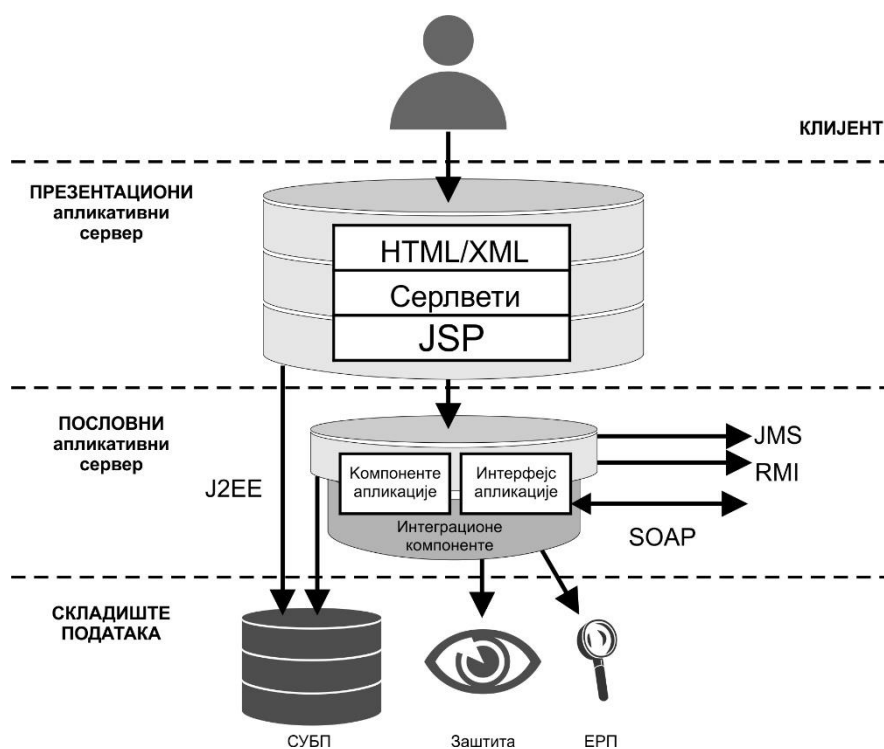
размену података разумљиву људима. Нотација објеката врши се помоћу програмског језика *JavaScript* (енг. *JavaScript Object Notation – JSON*), језик за серилизацију података (енг. *Yet Another Markup Language –YAML*).

Веб сервиси се објављују на јединственој локацији (*UDDI*) која представља место где се сервиси нуде као услуге и то је централизована локација која обезбеђује механизам за регистровање и њихово проналажење. *UDDI* користи *SOAP* протокол за комуникацију и омогућава клијентима да пронађу сервис, као и серверу да га објави. Генерално, већина људи класификује веб услуге у три категорије, и то као:

- *Representational state transfer – REST*. *REST* је помало погрешно схваћен концепт. Многи покушавају да користе *REST* на местима где то заиста није најбоље решење. Дакле, постоји „злоупотреба“ у смислу дизајна *RESTful*, али људи то решење ипак називају само *REST*. Али се данас издваја мрежни сервис под називом *RESTful* који је потиснуо *SOAP* и *WSDL*. Подаци се најчешће пребацују у *JSON* формату, мада је доступан и *XML* и *YAML* формат. Заснива се на *REST* архитектури, веома је флексибилан и једноставан за разумевање.
- *Remote Procedure Call – RPC*. *RPC* је термин који се примењује за употребу технологија као што је *SOAP*, мада то може бити било који прошириви језик за означавање или други *XML* формат. У системима типа *RPC*, уређаји комуницирају на начин клијент–сервер, где клијент захтева да сервер изврши неку функцију и одговор се враћа. Та комуникација се углавном одвија преко *HTTP*-а, па назив *RPC* није баш најбољи израз и помало је опасан, јер тера људе да имају ограниченији поглед на међумашинску комуникацију. Користи иста правила за транспорт као *SOAP* али има другачију структуру поруке.
- Хибрид између *REST* и *RPC*. Последња класификација услуга је хибрид *REST*-а и *RPC*-а. О овоме се мало може рећи, осим што се користе мало оба модела.

Интернет није дизајниран тако да постоје само порт 80 (*HTTP*) или порт 443 (*HTTPS*). Свака машина има 65535 доступних портова за комуникацију „услуга“ које треба користити. Неки од портова су дефинитивно много популарнији (као, на пример, порт 80), али ако се он сматра као „једини порт“ и једини начин за дизајнирање веб услуга, онда пропуштамо огромну прилику да у потпуности искористимо моћ самог интернета. На интернету постоји постоје милиони уређаја и много апликација чији се број стално повећава. Како време пролази, све више уређаја директно почиње да комуницира један са другим, тако да приморавати сваку апликацију да следи исти модел, односно користи исти протокол и исти формат података је једноставно погрешно. Веб услуге би требало да омогуће људима скоро све врсте услуга које они могу да остваре управо преко интернета.

Оно што је важно јесте да апликације које требају међусобно да комуницирају имају све техничке могућности и да остваре ту комуникацију. Један од разлога зашто је употреба портова 80 и 443 стекла толику популарност је тај што је њихова употреба омогућила много лакшу комуникацију путем *Network Address Translation* – *NAT* рутера (Kreger, 2001). Њиховом применом омогућено је да људи покрећу све врста услуга, па чак и стримовање аудио и видео записа преко *HTTP*-а. Али, са друге стране, врло је разумљиво да се жели заштитити систем од напада злонамерних корисника на интернету. Може се десити да се преко порта 80 унесе вирус, као и да се изврши пренос осетљивих корпоративних документа преко порта 443. Зато не треба сматрати да су *REST* и *RPC* једино легитимно средство за дефинисање протокола за размену података. Они свакако задовољавају потребе великог броја апликација и логично имају смисла када се користи веб прегледач. Али свакако се не би користили *REST* или *RPC* и за креирање веб сервиса базираних на вештачкој интелигенцији.



Слика 2.2. Четворослојна архитектура еУправе

Веб сервиси у сарадњи са десктоп *GUI* апликацијом су нешто између веб и десктоп апликације. Веб сервис на серверу даје функционалност, док десктоп апликација даје прилагодљиви графички интерфејс. Комуникација између њих се остварује преко *XML* или *JSON* формата. Веб сервис у сарадњи са десктоп *GUI* апликацијом је флексибилнији од веб апликације јер корисник може да прилагоди изглед апликације на десктопу, док корисник веб апликације мора да користи веб прегледач и нема утицаја на то како ће апликација

изгледати на екрану. Вишеслојна архитектура са коришћењем сервиса у софтверском инжењерству базирана је на објектно-оријентисаном приступу развоја софтвера. Глобални модел софтверске архитектуре еУправе са становишта функција је такође вишеслојна архитектура, а реализован је као *четворослојна базирана архитектура* (Слика 2.2).

2.3.1 Модели комуникације у еУправи

При разматрању различитих модела комуникације у еУправи треба истаћи да путем њих јавна управа остварује комуникацију како са грађанима, тако и са привредом. Међутим, у зависности од врсте учесника у комуникацији, три основна модела комуникације у електронској комуникације су:

1. **Модел комуникације G2C – *Government to Citizen*.** Одлика ове комуникације је да интеракција владе са грађанима кроз бројне услуге еУправе више окренута према појединцу него према пословном субјекту. Грађани као појединци у интеракцији са јавном управом могу обавити различите послове као што су: наручивање извода или уверења о некажњавању, пореско уверење и др.
2. **Модел комуникације G2B – *Government to Business*.** Ово је модел комуникације владе и привредних субјеката у коме су учесници јавна управа (влада) и привреда (пословни субјекти). Услуге еУправе дефинисане овим моделом имају за циљ подршку привреди а уједно се подстиче и сама конкурентност привредних субјеката што позитивно утиче на опште пословно окружење. Овај модел комуникације еУправе представља велики потенцијал за привреду.
3. **Модел комуникације G2G – *Government to Government*.** Код овог модела, комуникација представља међусобну сарадњу републичке владе и локалних самоуправа. Комуникација се огледа у интеракцију субјеката јавне управе, које могу бити владине службе али и између владе и локалних органа кроз „хоризонталну“ или „вертикалну“ шему. Хоризонтални приступ (шема) представља комуникацију структура власти на истом нивоу. Вертикални приступ (шема) је комуникација између хијерархијски различитих структура власти као што је комуникација општина и владе. Примери услуга намењених корисницима у овом моделу су: е-писарница, е-захтеви, е-седнице и сличне.

Поједини извори наводе да постоји још један модел еУправе, тзв. управа-запослени (енг. *Government for Employees, G2E*) модел (Ntulo & Otiike, 2013). У овом моделу запослени представљају кориснике услуга еУправе. Запослени управо преко интранет мрежне инфраструктуре имају могућност да остваре услуге као што је електронска пријава годишњих одмора или е-обука као и друге активности којима се смањују трошкови

функционисања јавне управе при чему се повећава поузданост и сигурност укупне администрације (Спалевић, Милисављевић, & Илић, 2017). Као што се може уочити, модел G2G омогућава брз и благовремен проток информација између запослених, управљање знањем и рад на заједничким пројектима.

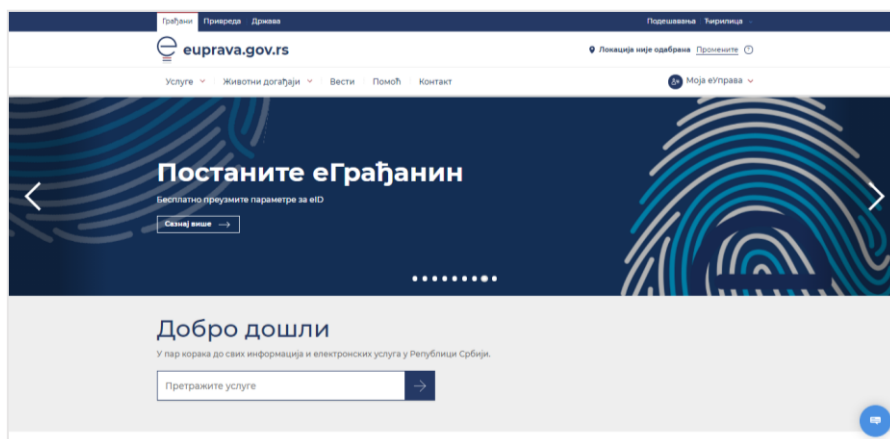
2.3.2 Веб сервиси на порталу еУправа

Након скоро 11 година од успостављања првог националног Портала еУправа, чија је сврха била пружање информација и услуга грађанима, правним лицима и државној управи и локалној самоуправи, грађанима Србије је од фебруара 2020. године постао доступан нови Портал еУправа. На Порталу еУправа грађани имају могућност да виде личне податке из 20 различитих електронских евиденција и регистара у надлежности следећих институција јавне управе:

- Министарство државне управе и локалне самоуправе садржи податке из матичне књиге рођених, венчаних лица, као и податке о бирачком месту.
- Министарство унутрашњих послова садржи податке из личних карата грађана, пребивалиште, држављанство, регистрацију возила, возачке дозволе и легално поседовано оружје.
- Централни регистар обавезног социјалног осигурања поседује податке о обрачунатим и плаћеним доприносима за обавезно социјално осигурање.
- Национална службе за запошљавање поседује податке са евиденције незапослених лица, као и историју тих евиденција.
- Републички геодетски завода (РГЗ) – подаци из катастра непокретности.
- Републички фонд за пензијско и инвалидско осигурање (ПИО фонд) – подаци из матичне евиденције осигураника.
- Пореска управа Републике Србије – подаци о пореским обавезама.
- Локална пореске администрација (ЛПА) – подаци о непокретностима као и о стању на рачунима.
- Централни регистар становништва – подаци из регистра матичних књига рођених/венчаних, подаци о пријављеном боравишту и пребивалишту, подаци о пријављеном привременом боравку у иностранству, као подаци из биометријске личне карте и пасоша, подаци о обавезном социјалном осигурању, итд.

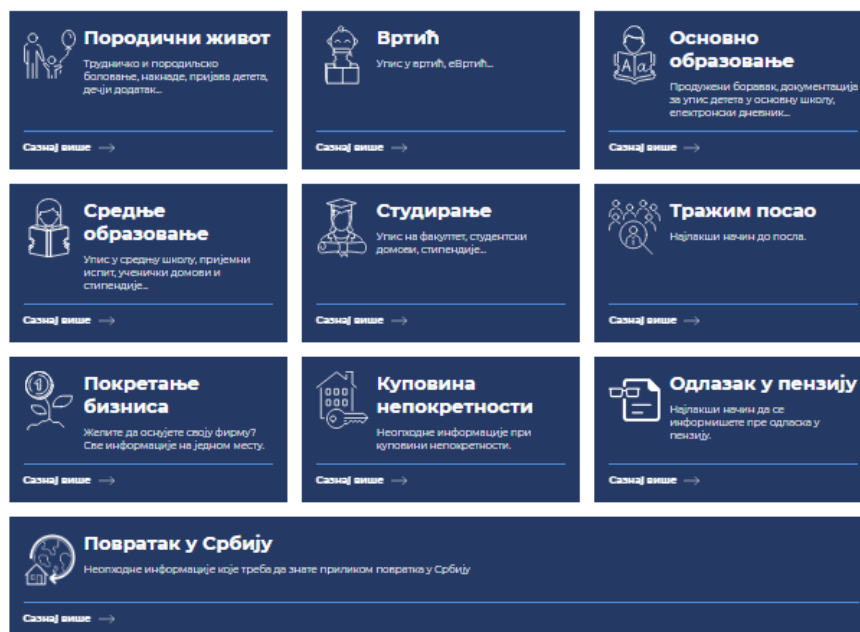
Дакле, сваки грађанин у Републици Србији путем Портала еУправа (Слика 2.3) има на једном месту транспарентан увид у све своје податке. Насловна страница Портала еУправа састоји се из три секције: Грађани, Привреда и Држава. Унутар сваке од секција врши се даља класификација доступних електронских услуга. Ове услуге су класификоване

на основу животних области у којима грађани остварују одређено право, обавезу или неки правни интерес (Alruwaie & cap., 2012).



Слика 2.3. Почетна страна Портала еУправа

Секција која се односи на грађане садржи поткатегорије унутар којих они могу електронским путем да приступе одговарајућим услугама, груписаним по различитим животним областима (Слика 2.4).



Слика 2.4. Веб сервиси груписани у различите животне догађаје

Тако, рецимо, поткатегорија „Документа и уверења“ садржи услуге преузимања уверења о (не)кажњавању, вођењу кривичног поступка, извода из матичних књига, пријаве о боравку страног лица, исправе о оружју, добровољно служење војног рока, квалификовани електронски сертификат, потпис у „облаку“ (енг. *Cloud*), паркингу (за особе са инвалидитетом). Услуге које садржи поткатегорија „Породица“ су: „Бебо, добро дошла на свет“, еВртић, еВртић – родитељ странац, еУпис, Моја средња школа, еДневник.

Поткатегорија „Здравље“ пружа услуге као што су здравствено осигурање, здравствена заштита, COVID-19. Грађанима су доступне и следеће услуге у оквиру категорије „Посао и финансије“: локална пореска администрација, порези, подстицаји, плати, интелектуална својина, моји подаци за банку, дигитална имовина, накнаде, конкурси за радна места, стручно усавршавање).

У секцији која се односи на привреду, налазе се услуге које се груписане за животне догађаји као што су: „Пословање и финансије“, „Трговина и туризам“, „Пољопривреда“, „Уверења, исправе и дозволе“, „Здравље“ (са регулативама о коришћењу лекова у хуманој и ветеринарској медицини, регулативама о медицинским средствима, итд.), „Саобраћај“, „Животна средина“ и друге. Секција Држава садржи услуге које пружају државни органи и то: инспекцијске службе преко услуге „ЕИнспектор“, временски жиг или друге услуге од поверења преко услуге „ЕПлаћање“, размена података преко јединственог система као и доступност отворених података преко услуге „Регистри“, различите сагласности унутар услуге „Печат“ и испит за инструкторе преко услуге „Обуке“.

Све три почетне секције (**Грађани, Привреда, Држава**) садрже и одељак „Све услуге“, који усмерава корисника на одређену страницу органа јавне управе са једном или више датих услуга. Преко Портала еУправе сваки грађанин у Србији има прилику да на једноставан начин изврши проверу тачности својих података. Уколико се примети грешка у подацима, грађани се могу обратити надлежној институцији ради корекције тих података што свакако доприноси развоју еУправе у Србији. Као што је наведено, услуге и разне информације на Порталу су организоване кроз десетак области животних догађаја као што су: породица, вртић, основно и средње образовање, студирање, тражење посла, покретање бизниса, куповину или продају некретнина, пензионисање, итд. Понуђене области садрже одговоре на 300 питања које је Канцеларија за ИТ и еУправу прикупила из анкета које су грађани попуњавали. Дате анкете су биле од великог значаја како би се идентификовали реални животни проблеми грађана, а чијом анализом су добијене информације о томе шта највише грађане интересује у одређеним животним ситуацијама. Одређивање одговора на питања урађено је од стране заједничких тимова који су били састављени од различитих државних институција. Ови тимови су се трудили да дати одговори буду што разумљивији и краћи како би их грађани боље прихватили и разумели.

2.3.2.1 Креирање налога на порталу еУправа

Када се грађанин на Порталу региструје својим корисничким именом и лозинком, неопходно је да приложи неки од својих лични докумената који могу да се скенирају или читају (лична карта или пасош). У случају да се прилажу фотографија или скенирана лична

карта, потребно је да обе странице документа буду приложене у једном фајлу. На адресу електронске поште која је наведена грађанин добија поруку са линком преко којег је потребно потврдити регистрацију. Након потврде регистрације, треба да се сачека добијање још једног мејла потврде након чега су доступне услуге Портала еУправа, односно после провере документа од стране овлашћеног лица најкасније у року од 48 сати кориснички налог постаје активан. Сваки грађанин на Порталу еУправа тренутно може да се пријави одабиром једног од три понуђена начина:

- **Пријава корисничким именом и лозинком** је пријава са основним нивоом поузданости. Пријављеним корисницима доступан је ограничен број електронских услуга.

Registracija | Prijava | Pomoć | Kontakt

Ime:

Prezime:

MBOG:

Prilog:
Maksimalno 2 fajla, 3MB veliki. Dozvoljene ekstenzije: pdf, png, jpg, jpeg.

Tip dokumenta:
Izaberite tip dokumenta

Broj dokumenta:

Broj dokumenta:

Prebivalište:
Odaberite mesto

Korisničko ime:
Unesite adresu elektronske pošte, koja će predstavljati korisničko ime.

Lozinka:

Upišite lozinku koja će sadržati minimum osam karaktera, bar jedno veliko i malo slovo, broj i specijalni karakter.

Potvrda lozinke:

Ponovite lozinku koju ste prethodno uneli.

Jačina lozinke:

Dostavljanjem dokumenta u elektronskom obliku potvrđujete da ste lice za koje ste se izjavili da jeste.

SLAŽEM SE SA USLOVIMA KORIŠĆENJA

Nisam robot

Portal za elektronsku identifikaciju
Web prezentacija je licencirana pod uslovima licence Creative Commons Autorstvo-NeKomercijalno-Bez prerada 3.0 Srbija. Web projekat: ite.gov.rs
Uslovi korišćenja

Слика 2.5. Електронски формулар за регистрацију на Порталу за електронску идентификацију (еИД)

- **Пријава квалификованим електронским сертификатом** представља пријаву са високим нивоом поузданости. Корисници који се пријављују на овај начин могу самостално да генеришу основни начин пријаве (основни ниво поузданости) као и да електронски потписују документа и захтеве.
- **Пријава мобилним телефоном**, односно путем апликације *ConsentID* представља такође пријаву са високим нивоом поузданости. Код овог вида пријаве, неопходно је да корисник поседује одговарајуће параметре ради подешавања апликације коју је потребно инсталирати на мобилном уређају.

Ограничен број услуга доступан је грађанима преко Портала уколико се они пријављују преко корисничког имена и лозинке који представља **основни ниво поузданости**. За овај начин пријаве грађанин треба да изабере начин пријаве под насловом Корисничко име и лозинка (слика 2.6). Након тога, уносе се неопходни подаци на страници Пријава, а то су корисничко име (имејл адреса која се наводи приликом регистрације) и лозинка.

The image shows the top section of a login page. It has a light gray header with the word 'Пријава' (Login) on the left. Below the header is a horizontal bar with three buttons: a dark blue button with a user icon and the text 'Корисничко име и лозинка', a white button with a certificate icon and the text 'Квалификовани електронски сертификат', and a white button with a mobile phone icon and the text 'Мобилна апликација'.

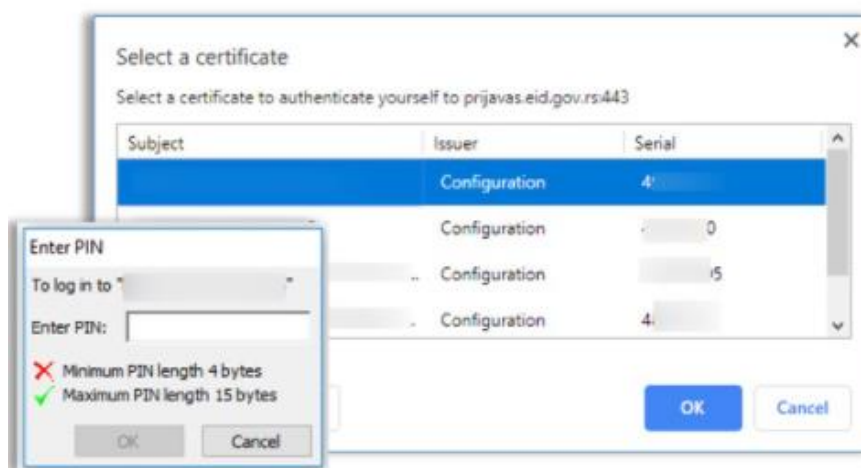
Слика 2.6. Пријава на Портал еУправа

После попуњавања ова два податка кликне се на дугме „Пријавите се“. У случају да се заборави лозинка, на страници Пријава испод дугмета „Пријавите се“ (Слика 2.7) треба потврдити линк „Забрављена лозинка“, којим се омогућава поновно постављање лозинке. Лице које се пријављује на Портал треба да упише своје корисничко име, након чега треба потврдити дату активност преко дугмета „Поднеси“. Код корисничког имена даје се обавештење о неопходности коришћења електронске поште коју је лице користило приликом регистрације налога на Порталу.

The image shows a login form with a light blue border. It contains two input fields: the first is labeled 'Корисничко име:' with a sub-label '(Адреса електронске поште коришћена приликом регистрације)'; the second is labeled 'Ваша лозинка:' and has a 'ПРИКАЖИТЕ' button to its right. Below the fields is a large green button with a white envelope icon and the text 'Пријавите се'. At the bottom left of the form is a link labeled 'Забрављена лозинка'.

Слика 2.7. Страница Пријава корисничким именом и лозинком на Порталу еУправа

У циљу унапређења електронске идентификације корисника на различитим порталима јавне управе кроз коришћење јединственог система електронске пријаве, од августа месеца 2020. године свим корисницима Портала је омогућен приступ преко јединственог електронског идентитета корисника (еИД). Овај специфичан идентитет за сваког корисника је креиран од стране самог Портала еУправа у сарадњи са националним порталом за електронску идентификацију (Портал еИД). Пријава квалификованим електронским сертификатом представља **висок ниво поузданости**. Како би се правилно користио квалификовани електронски сертификат, сваки корисник на свом рачунару треба да инсталира софтвер сертификационог тела који је бесплатно доступан на интернет страницама сертификационог тела. Пријава се врши избором начина пријаве Квалификовани електронски сертификат. На прозору који се након начина пријаве појави грађанин треба да одабере свој сертификат и унесе ПИН (Слика 2.8). Ако се унесе погрешан ПИН више од четири пута или се заборави ПИН сертификата, неопходно је контактирати сертификационо тело које је кориснику издало сертификат.



Слика 2.8. Софтвер за пријаву електронским сертификатом на Порталу еУправа

Пријава мобилним телефоном, тј. путем апликације *ConsentID* представља такође висок ниво поузданости. Увођење мобилне апликације *ConsentID* свим грађанима (корисницима) пружа могућност коришћења услуга еУправе преко мобилног уређаја. На тај начин превазиђен је проблем који је настајао при читавању електронског сертификата због неадекватне инсталације услед коришћења различитих оперативних система. Корисници који поседују квалификовани електронски сертификат сами могу да генеришу налог са тзв. **двофакторском аутентификацијом** (енг. *Two Factor Authentication, 2FA*). Без обзира да ли имају или немају електронски сертификат, као што је напоменуто, уз апликацију *ConsentID* корисницима Портала омогућено је пријављивање уз потврђивање идентитета преко мобилног телефона, након чега им је омогућен приступ електронским услугама не само на

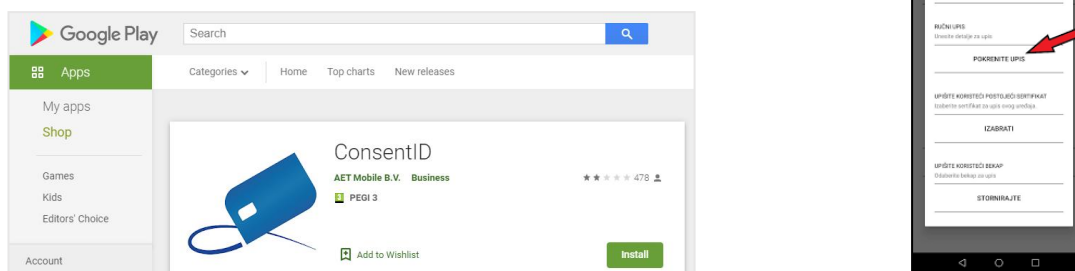
Порталу еУправа већ и услугама на порталима других државних органа. Први државни портал који је омогућио пријављивање са потврђивањем идентитета корисника преко мобилног уређаја био је *Национални портал за електронску идентификацију грађана и привреде* (www.eid.gov.rs). Пријављивањем на њему грађани даље могу да приступају и другим колаборативним веб сервисима кроз portale државних органа (слика 2.9) као што су: „еУправа“, „Локалне пореске администрације – ЛПА“, „Мој есДневник“, „Моја прва плата“. У процесу издавања налога за апликацију *ConsentID* укључени су и бројни шалтери пошта, општина и локалних пореских администрација широм Србије. Без обзира на то да ли корисник има или нема креиран кориснички налог, он има могућност да на неком од шалтера за издавање електронског идентитета изврши регистрацију свог налога као и да добије неопходне параметре за пријаву преко мобилне апликације *ConsentID*.



Слика 2.9. Дијаграм случаја коришћења апликације *ConsentID* за пријаву на тренутним порталима

Уколико корисник изабере овај начин пријаве на Портал еУправа, потребно је да инсталира са *Google Play Store*-а или *App Store*-а мобилну апликацију под називом *ConsentID*. На једном телефону може да се инсталира ова апликација али само за једног корисника. У зависности од одабраног језика на телефону (енглески или српски), тај језик ће бити и у апликацији коришћен. Тако да, ако уређај приказује текст на српском језику, онда ће и апликација *ConsentID* приказивати текст на српском језику. Подешавање српског језика на апликацији *ConsentID* за кориснике iOS оперативног система врши се преко опција *Settings* → *ConsentID* → *Preferred Language*. Након покретања апликације *ConsentID* на екрану мобилног уређаја приказује се поље „Покрените упис“ (енг. *Start Enrollment*) са којим покрећемо процес иницијализације.

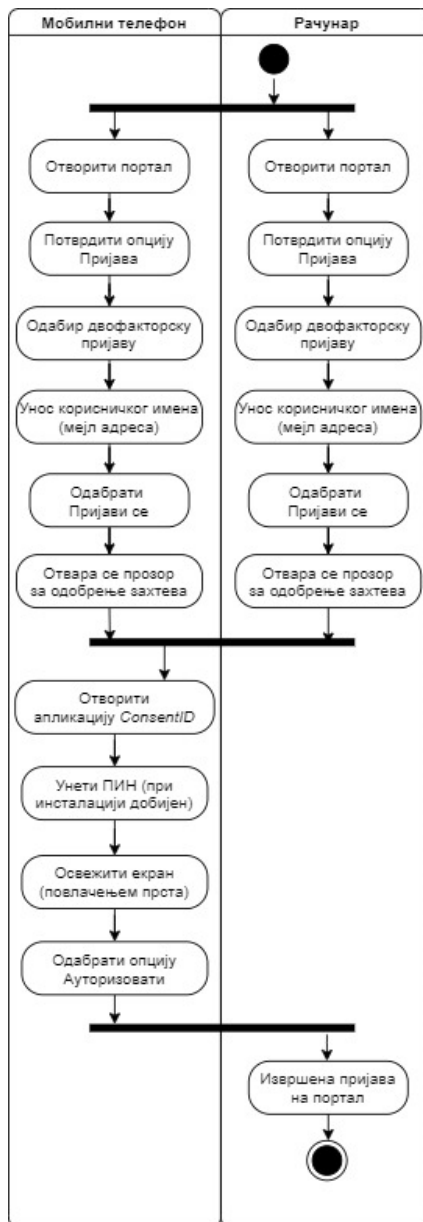
На електронском обрасцу који се следећи приказује од корисника се очекује да попуни поља са подацима добијеним преко мобилне апликације (Слика 2.10). Поља „ИД корисника“ и „Регистрациони код“ треба попунити, док се поље *Environment Cod* попуњава аутоматски. Поље означено као Опциона шифра не треба попуњавати. Након тога неопходно је одабрати дугме „Упис“. Кроз следећи екран остварује се мера безбедности којом се одређени корисник или неко кога он овласти да користи мобилну апликацију ауторизује на тражени веб сервис. Мера безбедности се огледа у томе да корисник два пута упише свој лични идентификациони број – ПИН, при чему се очекује да тај број и запамти јер ће бити неопходно његово поновно коришћење код следећег покретања апликације. После иницијализације приказује се екран са захтевом за приступ. На почетку, као и у случају када нема захтева на чекању, ова листа захтева је празна. Да би се освежила листа, потребно је да корисник превуче прстом преко екрана одозго надоле или кликне на иконицу за освежавање.



Слика 2.10. Апликација *ConsentID* за пријаву на Портал еУправа

Ако корисник Портала одабере дугме за пријаву апликацијом *ConsentID* преко мобилног уређаја и унесе своје корисничко име, ауторизација пријаве биће послата на његов уређај. У случају да нотификација није стигла, а пријава на Портал је већ иницирана онда треба покренути апликацију *ConsentID*, уписати ПИН и одабрати пријаву са листе захтева. Том приликом приказаће се екран са две опције – за одбацивање или прихватање захтева. За успешни завршетак пријаве треба да се кликне зелено дугме „Ауторизовати“ (Слика 2.11).

Корисник квалификованим електронским сертификатом може да се пријави преко Портала за електронску идентификацију након чега је потребно изабрати опцију „Издај податке“. Том приликом биће генерисани подаци који су потребни за коришћење апликације *ConsentID*. Корисници са креираним корисничким налогом на Порталу еУправа могу да се пријаве са својим креденцијалима (лозинка и корисничко име).



Слика 2.11. Дијаграм активности пријаве преко апликације ConsentID

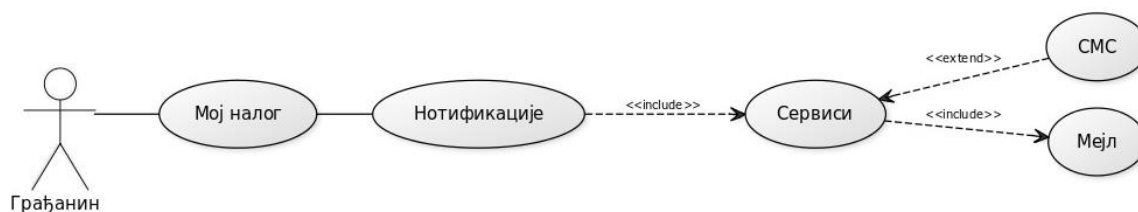
Након успешне пријаве на Портал еУправа сваком грађанину Републике Србије пружају се следеће могућности:

- коришћење и извршавање електронских услуга,
- персонализација Портала,
- праћење статуса поднетих захтева,
- коришћење форума Портала,
- пријава на одабране вести са Портала.

2.3.2.2 Страница „Моја еУправа“

На страни „Моја еУправа“ пријављени корисник има могућност за персонализацију Портала. У оквиру стране „Мој налог“ могу да се уреде лични подаци корисника. По препоруци, сва поља у профилу треба попунити јер се они касније користе за аутоматско

попуњавање образаца у случајевима коришћења других електронских услуга. Свакако треба нагласити да су подаци које корисник уноси заштићени, тј. нису доступни трећим лицима ни под каквим условима. У оквиру опције „Нотификације“ корисник може да изабере начин обавештавања о сервисима, захтевима или коментарима на Порталу (Слика 2.12).



Слика 2.12. Дијаграм случаја коришћења једне од нотификација на Порталу еУправа

Корисник може да добије обавештења путем електронске поште и путем СМС-а. Преко странице „еСандуче“ пријављени корисник има могућност да прегледа сва документа или фајлове које су преко сервиса „еИспорука“ послате од стране институција, које се, у зависности од аутентификације, могу и електронски потписати. На овај начин дата документа имају једнаки правни основ као и потписана документа.

2.3.2.3 Страница „Услуге“


На страници „Услуге“ сваки пријављени корисник може да приступити тренутним услугама електронске управе. Самим избором услуге добијају се детаљне информације о одабраној услузи, као и информације о томе да ли се услуга може изврши електронским путем. За ову услугу неопходно је унапред код корисника инсталирати софтверске пакете *Java* и *Adobe Reader*. Ова услуга захтева попуњавање електронског обрасца, при чему поља на обрасцу веома јасно говоре о траженом податку, где је омогућена и контрола унетог садржаја за разлику од папирне форме.

Корисник добија и повратне информације о коректности унетих података. У ситуацији да корисник није унео неопходан податак, систем услуге ће приказати одговарајућу поруку и биће онемогућен наставак рада све док грешка не буде исправљена. Важна могућност електронских образаца на Порталу јесте могућност за аутоматско преузимање података из корисничког профила, као и обезбеђивање различитих потврда и сертификата, као на Слици 2.13.

Насловна > Све услуге > ЕУ Дигитални зелени сертификат

Покрени услугу →

Извршавање ове услуге је доступно само корисницима који имају креиран кориснички налог. Кликните на дугме да бисте извршили услугу.



Институт за јавно здравље Србије "Др Милан Јовановић Батут"
Др Суботића 5,
Телефон: 011 2684 566
www.batut.org.rs

Списак услуга

ЕУ Дигитални зелени сертификат

Читај ми

Потврда о извршеној вакцинацији против COVID-19, резултатима тестирања на заразну болест SARS-CoV-2 и опоравку од болести COVID-19 која је ЕУ компатибилна.

Шта представља ЕУ Дигитални зелени сертификат?

ЕУ Дигитални зелени сертификат (ЕУ ДЗС) представља нови тип сертификата који је намењен нашим грађанима приликом путовања у неку од земаља Европске уније, као и у земље изван ЕУ које користе стандард сертификата EU Digital COVID Certificate. Списак земаља која прихватају овај стандард сертификата доступан је на линку [Европске комисије](#).

Које податке обухвата ЕУ ДЗС?

ЕУ Дигитални зелени сертификат, поред личних података грађана, обухвата један од следећих података:

- примљена вакцина,
- тест (PCR и антигенски тест),

Слика 2.13. Пример информација о одабраној услузи

3 СИСТЕМ ЗА ИМУНИЗАЦИЈУ ПРОТИВ БОЛЕСТИ COVID-19

Крајем 2019. године Светска здравствена организација – СЗО (енг. *World Health Organization – WHO*) била је обавештена о појави респираторних инфекције код већег броја људи у граду Вухану на територији Републике Кине. Као узрочник инфекције био је идентификован нови вирус корона под ознаком SARS-CoV-2 (енг. *Severe Acute respiratory Syndrome CoronaVirus 2 – SARS-CoV-2*). Болест изазвана овим вирусом добила је назив COVID-19 (енг. *Corona Virus Disease 2019*). Као што је било познато, прва зараза вирусом SARS-CoV-2 код људи догодила се крајем децембра 2019. године на великој пијаци у Вухану, у кинеској провинцији Хубеи. Међутим, студија Универзитета Џеџенг у Хангџоу (Xu, Xie, Zhang, & Xu, 2022) указује на то да се епидемија извесно појавила на неком другом месту много раније него што је регистрована у Вухану. Анализа генетских секвенци вируса показала је да постоје две врсте корона вируса SARS-CoV-2:

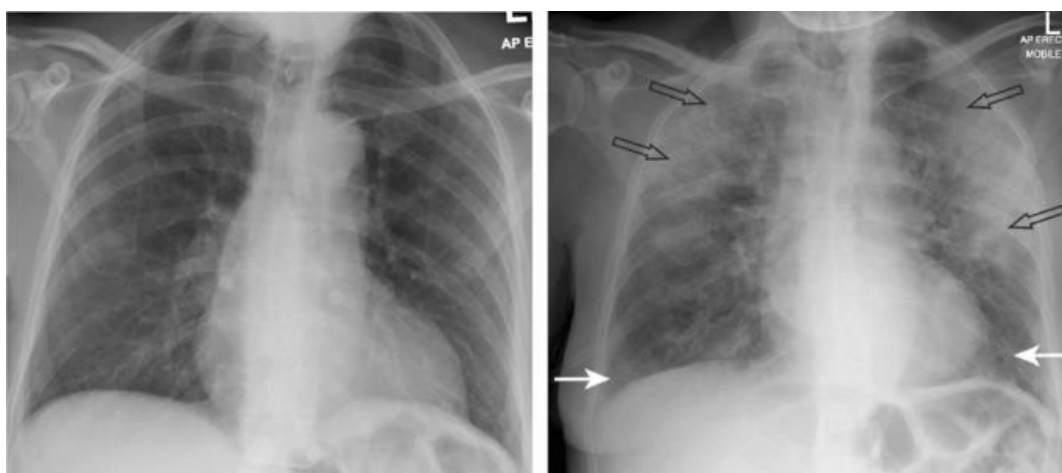
- Вирус ТИП 1 чије порекло још није утврђено,
- Вирус ТИП 2 настао на пијаци у граду Вухану.

Вирус корона (SARS-CoV-2) спада у исту подгрупу као и већина до сада познатих корона вируса као што су MERS-CoV и SARS-CoV, који су први пут откривени још 1962. године. Доказано је да су ови вируси узрочници респираторних обољења код птица и сисара. Болест проузрокована вирусом SARS-CoV-2 изазива блаже тегобе горњих дисајних путевима, и често има симптоме који личи на прехладу. Код особа са слабијим имунитетом (старија лица и деца) вирус може да се спусти на ниже дисајне органе са симптомима упале плућа па чак је могућ и смртни исход при отказивању рада плућа или бубрега.

Феномен у вирусологији познат као „преливање“ (енг. *Spillover*) представља појаву нових патогених вируса код људи, који су претходно кружили само животињским светом. У екологији и епидемиологији „преливање“ означава тренутак када патоген прелази са једне врсте домаћина на другу, а сматра се да овај процес може бити у основи порекла болести COVID-19. Најновије студије показују сличност вируса SARS-CoV-2 са другим сличним вирусима корона (Zakharov, Balykina, Pin, & Tick, 2022), присутним код неких врста слепих мишева које припадају роду *Rhinolophus*. Ови слепи мишеви су распрострањени у јужној Кини, али и широм Азије, Блиског истока, Африке и Европе и сматра се да су управо они природни резервоар вируса. Слепи мишеви су сисари који коегзистирају и еволуирају заједно са многим вирусима, те не чуди њихова повезаност са болешћу COVID-19. Разлог зашто су слепи мишеви резервоари вируса може да лежи у биолошким факторима попут окупљања енормног броја (до милион) јединки на једном

месту ради одмора и/или хибернације, односно способности летења, која је узрочник ширења вируса на врло великим подручјима.

Спроведена истраживања утврдила су велику подударност између људског генома SARS-CoV-2 и генома вируса корона (Queirós-Reis, и други, 2021) пронађеног у слепом мишу у кинеској покрајини Јунан. Међутим, због одређених разлика у рецепторима које вируси користе како би се везали и продрли у станице, појавила се могућност да је вирус посредством слепог миша као домаћина стигао до човека. С обзиром на обичаје који се примењују на градској пијаци у Вухану, где се дивље животиње допремају живе и кољу на лицу места, још увек није у потпуности утврђено које су тачно животињске врсте биле домаћини у случају вируса SARS-CoV-2.



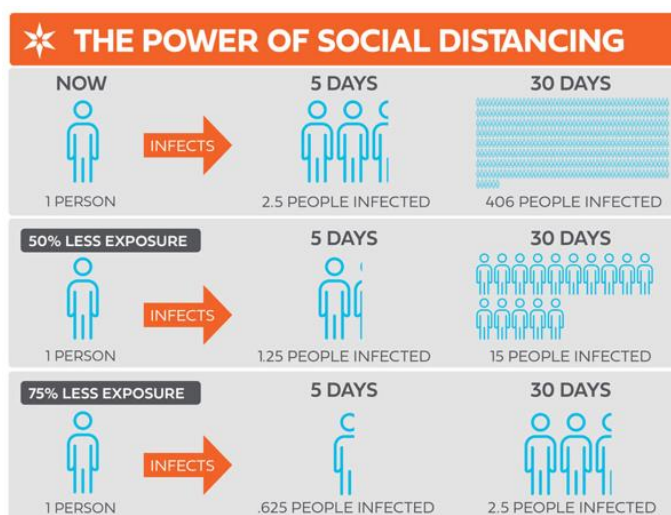
Слика 3.1. Снимак плућа без вируса (лево) и са вирусом SARS-CoV-2 (десно) (Извор: (Tangudu, Kakarla, & Venkateswarlu, 2022))

Постоји велики број информација о болести COVID-19 доступних на званичним сајтовима здравствених установа, разним друштвеним мрежама, као и оне које се пласирају грађанима путем новина. Сумирајући неке од релевантнијих, могу се издвојити следеће (BBC News (на српском), 2020):

- Болест COVID-19 је болест узрокована новим вирусом корона. Слово „D“ у називу вируса означава „болест“ (енг. *Disease*). Медицински назив самог вируса је SARS-CoV-2. Скраћеница за вирус корона је КоВ (енг. *CoronaVirus – CoV*). Назив потиче од породице вируса код којих облик подсећа на круну због шиљастих наставка.
- На почетку инфекције, вирус почиње да се размножава у горњем делу дисајних путева или грлу. Након тога инфекција може да се спусти респираторним путем до плућа при чему може доћи до упалног процеса или пнеумоније плућа. Први симптом инфекције је кашаљ, а затим може доћи и до повећања телесне температуре. Симптоми корона вируса могу бити веома слични обичном сезонском грипу са

типичним симптомима poput oseћаја slabosti, glavobolje, bolova u mišićima, грознице и других.

- Најређи симптом болести COVID-19 представља губитак чула укуса или мириса. Ако лице без икаквих претходних узрока одједном престане да осећа мирис или укус, то је знак да он буде пажљив и да одмах крене да предузима препоручене мере у случају борбе против корона вируса. Треба свакако истаћи да кијање није симптом вируса, док кашаљ јесте.
- Носилац корона вируса је опасан по друге особе и пре него што се појаве симптоми. У просеку, сваки носилац новог вируса корона успе да зарази две до четири здраве особе. Због тога пандемија се врло брзо шири. Према подацима СЗО, свака 24 часа број заражених се повећавао за више од пола милиона људи. Пандемија се проширила свуда по свету, тако да је стигла и до најудаљенијих крајева света.



Слика 3.2. Брзина преноса инфекције без друштвене дистанце и са друштвеном дистанцом (BEACON COVID-19 RESPONSE, n.d.)

- Без обзира на постојање различитих мишљења о њиховој ефикасности важно је носити хируршке маске као вид борбе за спречавање ширења корона вируса. Маска и ако не може да пружи 100 % заштиту она свакако смањује ризик за ширење вируса на друге особе. Поред маске, веома је ефикасно држати физичку дистанцу између особа на мањем простору од препоручених два метра.
- Најпоузданије средство за превенцију вируса јесте детаљно прање руку. Ако случајно не постоји могућност да се оперу руке, може се користити било који антисептички гел или спреј за дезинфекцију руку. Додатне мере за спречавање вируса, по препоруци штабова за борбу против корона вируса, јесу забрана кретања и обавезни карантин у случају присуства вируса.

3.1 ДИЈАГНОЗА ВИРУСА SARS-CoV-2

За доказивање присуства инфекције вируса корона користе се лабораторијске методе какве се иначе примењују и за друге инфективне агенсе (вирусе и бактерије). Према (Стојковић, 2020) све ове методе се могу поделити на следеће:

1. **молекуларно генетичке** – ПЦР (енг. *Polymerase Chain Reaction – PCR*). ПЦР метода је стандардна метода за умножавање и доказивање присуства специфичних гена, односно молекула ДНК. Узимајући у обзир чињеницу да је генетички материјал SARS-CoV-2 вируса у форми молекула РНК, вирусни гени се најпре преписују (процедуром која се зове реверзна транскрипција) у молекулу ДНК. Одређени вирусни гени, сада у форми молекула ДНК, потом се умножавају милијарду пута како би се могли детектовати. Уколико се у узорку налази свега стотинак вируса, овом методом ће се умножити и специфично детектовати гени карактеристични управо за SARS-CoV-2 вирус. ПЦР тест детектује присуство свега 1 до 2 копије вируса у самом тесту, што одговара садржају од око 200 вируса у узорку.
2. **серолошке (имунолошке)** – Серолошким методама детектује се присуство одређених класа имуноглобулина (IgM, IgA и IgG) у крви пацијената. Постоје три врсте ових тестова: имунохроматографски (брзи) тестови, ELISA и имунофлуоресцентни тестови. Ови тестови се разликују по својој сензитивности и специфичности, а сваки произвођач тестова током валидације дефинише ове параметре. Уобичајено, имунохроматографски тестови имају сензитивност од око 90% (енг. *Enzyme Linked Immuno Sorbent Assay – ELISA*) док имунофлуоресцентни тестови имају сензитивност од око 99%.
3. **микробиолошке (антигенски тестови)** – SARS-CoV-2 антиген је протеин језгра вируса корона који чини 90% укупних протеина које производи вирус у току свог размножавања на слузокожи дисајних органа. Дијагностички тестови за детекцију SARS-CoV-2 антигена су направљени тако да директно детектују управо протеине језгра вируса који се налазе на слузокожи дисајних органа. Позитиван тест на SARS-CoV-2 антиген може да се потврди ПЦР тестом, који представља златни стандард у дијагностици инфекције изазване новим коронавирусом.

Наведени тестови могу да се раде на лични захтев или о трошку државе. Да би се оправдао захтев за тестирање потребно је извршити самопроцену на присуство вируса или урадити лекарски преглед. Особа која има знакове вирусне пнеумоније „нејасног узрока“

или има упадљиве симптоме као што су кашаљ, грозница и недостатак даха, а у претходном периоду је имао је контакт са зараженом особом онда та особа спада у случајеве за које се основано сумња да је заражена вирусом. Према основној процени, сам боравак у затвореној просторији са зараженим није довољан доказ на могуће преношење болести код свих присутних.

3.1.1 Вакцине против болести COVID-19

Вакцине омогућавају да се имуни систем код живих бића упозна са вирусима на један безопасан начин. Имунолошки систем код људи вирус третира као уљеза и самостално се учи начину борбе против тог вируса. Ако се имуни систем касније поново изложи вирусом, он ће знати како да се избори са том инфекцијом. Вакцине које СЗО одобрава за употребу морају да прођу ригорозне тестове и клиничка испитивања како би се доказало да су сигурне и делотворне у контроли болести. Зато је било од изузетне важности важно да се омогући развијање вакцине против COVID-19 што је брже било могуће, али су се потребна одобрења за употребу мога добити тек пошто би задовољиле строге стандарде сигурности и ефикасности. Много кандидата за вакцину мање познатих фармацеутских компаније су се налазиле у претклиничкој фази, што значи да се њихова ефикасност тестирала само на животињама. Клиничке фазе које су следиле након тога, биле су следеће:

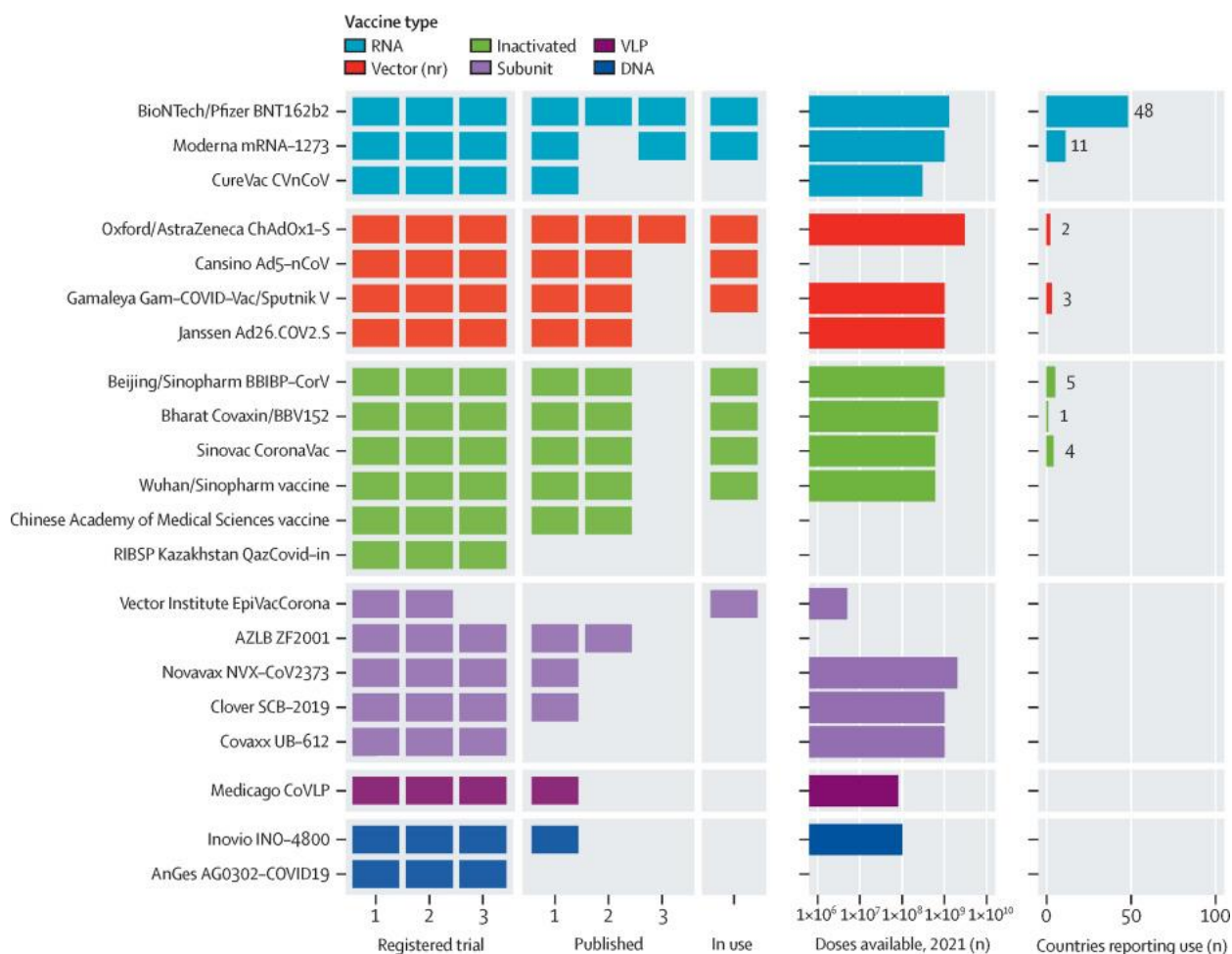
1. фаза: вакцина се тестира на малим групама пацијената;
2. фаза: вакцина се тестира на нешто већим групама, са најмање 100 особа, при чему се нарочито води рачуна о ранијим болестима или старости пацијената;
3. фаза: вакцина се тестира на најмање 1.000 пацијената, при чему се нарочито обраћа пажња на њену ефикасност и безбедност.

Након успешно завршених горе наведених клиничких фаза, произвођачи вакцина су могли да затраже дозволу за коришћење тих вакцина. Једна од првих вакцина против COVID-19 била је регистрована током августа месеца 2020 године у Русији. Московски истраживачки институт за епидемиологију „Гамалеја“ развио је вакцину под називом „Sputnik V“. Са друге стране, америчке фирме „Moderna“ и „Pfizer“ почеле су финалну фазу клиничког тестирања крајем јула 2020. године, када је десетина хиљада људи учествовала у томе. Из фирме „Moderna“ су тада саопштили да су на добром путу да дају прелиминарне податке последње фазе тестирања вакцине већ августа месеца. Америчка компанија „Pfizer“ и немачка фармацеутска компанија „BioNTech“ и ако је требало да обелодане прелиминарне податке тестирања своје РНК вакцине у октобру, то су урадиле током новембра месеца 2020. године.

СЗО је крајем децембра 2020. године ставила на листу за хитну употребу мРНА вакцину коју производе „Pfizer/BioNTech“ са ознаком BNT162b2. То је била прва вакцина од избијања заразе која је добила потврду СЗО. Државна агенција за храну и лекове Кине издала је 30. децембра условно одобрење за пуштање у промет нове вакцине фирме „Sinofarm“ против COVID-19 вируса. Ради се о вакцини са „деактивираним“ вирусом. Ова фирма је вакцину развила у сарадњи с Институтом за вирусологију из Вухана, односно Институтом за биолошке производе. Иначе, те врсте вакцина користе се већ деценијама и показале су добре резултате у пракси, на пример, у борби против дифтерије, хепатитиса Б, дечије парализе или тетануса. Још једна вакцина која је по последњој фази испитивања показала 70% успешности у заштити од COVID-19 била је резултат заједничког рада Универзитета Оксфорд и компаније „AstraZeneca“. Британска вакцина је у то време постигла огроман тријумф, али и разочарање пошто су друге вакцине, конкретно компанија „Pfizer/BioNTech“ и „Moderna“, показале успешност од чак 95% заштите. Према начину деловања, вакцине против COVID-19 можемо поделити на три главне групе:


- 1) **РНК вакцине:** Вакцина код које се део генетског кода вируса уноси у тело пацијента након чега организам производи вирусне протеине. Ови протеини омогућују пацијенту да се његов имунолошки систем избори са болешћу. На овај начин организам пацијента се учи да сам ствара једну врсту антитела ткз. „Т-ћелије“ за борбу против корона вируса.
- 2) **Аденовирусне вакцине:** Ову врсту чине вакцине произвођача „AstraZeneca“ и „Sputnik V“. Негде их називају и векторским вакцинама, а суштина је иста. Ове вакцине су сасвим другачије од РНК вакцина. У одређене аденовирусе, који су безопасни по људе, убацује се генетичка верзија вируса корона за протеин „шиљка“, спајк протеин који изазива имунолошку реакцију.
- 3) **Конвенционалне вакцине:** Кинеска вакцина компаније „Sinopharm“ спада у ову врсту вакцина. Конвенционалне вакцине се праве помоћу ослабљених облика вируса, а делује тако што „подучава“ имуни систем да ствара антитела против COVID-19. Антитела се везују за вирусне протеине.

Према подацима са почетка 2021. године, у свету су се развиле више од 200 нових вакцина кандидата. Један број кандидата за вакцину, као што је представљено на слици 3.3, већ се налазио у завршној 3. фази клиничких испитивања што је представљао завршни корак пре њеног одобрења за употребу. Многе фармацеутске компаније су објавиле информације о ефикасности њихових вакцина. Тако је вакцина компаније „Pfizer“ била ефикасна у 95% случајева, а примала се у две дозе у размаку од 21 дан. Слично је и са вакцином компаније „Moderna“ чија је ефикасност била 94,1%, а друга доза се примала 28 дана после прве дозе.



Слика 3.3. Тип и статус вакцина које се развијају против болести COVID-19 (Извор: (Shrotri & други, 2021))

Набавку вакцина у Републици Србији врши Републички фонд здравственог осигурања (РФЗО). Са друге стране, да би се нека вакцина или лек увезли потребно је одобрење Агенције за лекове и медицинска средства (АЛИМС) која гарантује квалитет и поузданост вакцина које су у промету. Такође, ова агенција издаје дозволу за коришћење вакцина чиме се избегавају могући нежељени догађаји око учинка вакцина у рутинској употреби. При стављању лекова у промет узимају се у обзир друга стручна мишљења изведена из клиничких испитивања, што је у складу са Хелсиншком декларацијом. Уколико Европска агенција за лекове (енг. *European Medicines Agency – ЕМА*) одобри неки лек, онда је много лакше да се он одобри и у Србији. Након одобрења вакцине компаније „Pfizer/BioNTech“ добијене од АЛИМС–а крајем децембра 2020. године у Србију је стигао први контингент од 4.875 доза вакцина. Иако вакцине руског произвођача „Sputnik V“ и кинеског „Sinopharm“ нису имале дозволу СЗО и ЕМА, агенција АЛИМС је крајем 2020. године одобрила и њихово коришћење на територији Републике Србије (Слика 3.4).

	Republika Srbija Agencija za lekove i medicinska sredstva Srbije 11221 Beograd, Vajvode Stepe 458 Telefon: +381 11 3951-125; 3951-110 Telefaks: +381 11 3951-131 e-mail: hygia@alims.gov.rs
Kontrolni broj uzorka: 6408/2021	Sertifikat broj: 5830/2021 Beograd, 16.07.2021.
Sertifikat analize dokumentaciona kontrola <i>Comirnaty, koncentrat za disperziju za injekciju, 195 x 0.45mL, (500mcg/mL)</i>	
INN naziv / Generičko ime:	mRNA vakcina protiv COVID-19 (sa modifikovanim nukleozidom)
Nosilac dozvole za lek:	PFIZER SRB D.O.O. - Beograd - Novi Beograd
Proizvođač:	BIONTECH MANUFACTURING GMBH
Broj serije:	FE6029
Rok upotrebe:	31.10.2021
Većina serije:	4
Stanje primljenog uzorka:	Uzorak je dostavljen u ispravnom stanju
Podnosilac zahteva za ispitivanje:	INSTITUT ZA VIRUSOLOGIJU, VAKCINE I SERUME "TORLAK" - Beograd
Datum dostavljanja uzorka:	13.07.2021
Datum dostavljanja dokumentacije:	** 13.07.2021., 16.07.2021
	<small>** Prvi datum je datum podnošenja zahteva; drugi datum je datum dostavljanja dodatne dokumentacije; poslednji datum je datum kompletiranja dokumentacije.</small>
Zaključak:	Na osnovu ocene dostavljene dokumentacije uzorak ODGOVARA propisanim zahtevima, koji su odobreni dozvolom za lek.
Dodatni podaci:	Ministarstvo zdravlja je donelo odluku broj 515-01-06485/2021-06 od 15.07.2021. godine, u skladu sa ovlašćenjem propisanim članom 156. stav 4. Zakona o lekovima i medicinskim sredstvima ("Službeni glasnik RS" broj 30/10, 107/12, 105/17 - dr. zakon, 113/17 - dr. zakon), da se u promet pusti data serija leka koja nije obeležena u skladu sa navedenim zakonom i propisima donetim za sprovođenje ovog zakona, odnosno koja nije obeležena u skladu sa uslovnim dozvolom za lek (lek u pakovanju na engleskom jeziku), uz uputstvo za lek na srpskom jeziku.
 Rukovodilac Nacionalne kontrolne laboratorije Mr ph. spec. Boris Bojic	 (MP) Spec. dr. med. Sata Jacovic
<small>Sertifikat se odnosi samo na kontrolisani uzorak, onakav kako je primljen. Agencija daje saglasnost za reprodukciju ovog sertifikata samo na zahtev nadležnih organa.</small>	
591821	
<small>Str. 1 od 1 Obrazac 2 (RUS P 15) Revizija 4 Važi od 01.12.2019.</small>	

Слика 3.4. Пример Сертификата анализе који издаје АЛИМС

Прва испорука руске вакцине извршена је 30. децембра 2020. године, када је у Србију стигло 2.400 доза, а затим је 29. јануара 2021. стигло још 40.000. Први контингент од милион доза кинеске вакцине стигао је у нашу земљу 16. јануара 2021. године, а затим у фебруару још пола милиона доза. У Србију је 21. фебруара 2021. стигла вакцина британско-шведске фармацеутске компаније „AstraZeneca“, 150.000 доза, након чега је у Београд, 2. априла 2021. Године, стигло још 57.600 доза коју је Србија тражила и платила путем COVAX механизма. Иначе, COVAX механизам је део система Светске здравствене организације и Глобалне алијансе за вакцинацију, који омогућава да једнако буду дистрибуиране вакцине различитих произвођача свим земљама (око 190) које су аплицирале преко тог механизма. Када се вакцина направи у великим количинама, онда се ставља у стаклене бочице, а затим пажљиво пакује за сигурно складиштење и транспорт у хладном режиму (Слика 3.5).



Слика 3.5. Бочица вакцине против болести COVID-19

Паковање вакцина мора бити у стању да поднесе екстремне температуре, као и ризике повезане са глобалним транспортом. Због тога се бочице са вакцином најчешће израђују од стакла, јер је тај материјал издржљив и способан да одржи свој интегритет на екстремним температурама. Када је вакцина преврућа или прехладна, постаје мање ефикасна или



Слика 3.6. Кутија за транспортовање вакцине Sputnik V

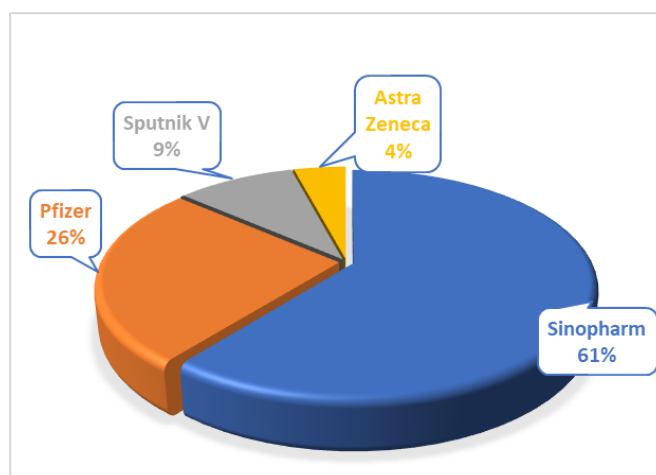
чак неактивна. Ако се чувају на неадекватној температури, вакцине могу бити уништене или небезбедне. Већина вакцина захтева складиштење и чување у фрижидеру на температури између 2 и 8°C. Неке вакцине захтевају температуре од чак -20°C, а поједине морају бити екстремно хладне, на чак -70°C. Обични фрижидери не могу стално да одржавају равномерну температуру, па су за ове драгоцене производе потребни специјализовани медицински фрижидери. Да би се одржао овај хладни ланац, вакцине се шаљу помоћу специјализоване опреме која не угрожава интегритет производа. Једном када пошилике слете у земљу одредишта, хладњаче транспортују вакцине са аеродрома у хладњачу складишта (Слика 3.6). Одатле се преносни ледени сандуци користе за транспорт вакцина из хладњаче до регионалних центара, где се чувају у фрижидерима. Ако се вакцинација одвија ван регионалне установе, последњи корак често захтева преносне ледене кутије за превоз робе до пунктова за вакцинацију. Нове технологије омогућиле су преносиве уређаје који могу држати вакцине на хладној температури неколико дана без потребе за напајањем електричном енергијом.

Табела 3.1. Поређење карактеристика доступних вакцина против COVID-19 у Републици Србији

Произвођач	Назив	Тип	Делотворност	Складиштење
Фармацеутске компаније „Pfizer“ и „BioNTech“	<i>Pfizer</i>	РНК	90%	-70°C
Фармацеутска компанија „Moderna“	<i>Moderna</i>	РНК (део генетичког вируса)	95%	-20°C до 6 месеци
Универзитет Оксфорд	<i>AstraZeneka</i>	Вирални вектор	Јак имунолошки одговор	Регуларна температура фрижидера
Институт Гамалеја	<i>Sputnik V</i>	Вирусни вектор (генетски модификовани вирус)	92%	Регуларна температура фрижидера
Фармацеутска компанија „Sinopharm“	<i>Sinopharm</i>	Ослабљени вирус	79%	Од 2°C до 8°C

Да би се избегло настајање сојева који превазилазе поствакцинални имунитет, обухват вакцинацијом мора да буде велики и брз. Јединствена ситуација је да је Србија у прва три месеца имунизације имала на располагању четири врсте вакцине, и то у довољној мери. Тако се на располагању нашла америчко-немачка вакцина („Pfizer/BioNTech“), руска вакцина (Гамалеја истраживачки центар, „Sputnik V“), кинеска вакцина („Sinopharm“) и британска вакцина („Oxford“ и „AstraZeneca“).

Основне карактеристике свих наведених врста вакцина приказане су у табели 3.1. Притом, интересантно је можда већ овде истаћи да су грађани Републике Србије убедљиво највеће интересовање (са више од 60 процената оних који су примили прву дозу) исказали за вакцином произвођача „Sinopharm“, приказано дијаграмом на Слици 3.7.¹



Слика 3.7. Избор врсте вакцина грађана Србије (Извор: еУправа Републике Србије)

3.1.2 Оперативни план за масовну имунизацију становништва

Прва вакцинација становништва у свету почела је у Великој Британији 8. децембра 2020. године. После тог датума све већи број држава је започео са вакцинацијом свог становништва, тако да се сваким даном број вакцинисаног становништва све више повећавао. Тако је и у Републици Србији током јануара 2021. године креиран оперативни план за имунизацију грађана против болести COVID-19. Овај план сачинио је Институт за јавно здравље Србије „Др Милан Јовановић Батут“ и њиме су дефинисане три фазе вакцинације тако да обухвате око 50% укупног становништва.

На основу датог плана, у првој фази (**Фаза 1а**) планирано је било да се вакцинише око 720.600 особа. То су углавном била лица са највећим ризиком од преношења вируса односно здравствени радници, као и запослени унутар установа социјалне заштите, односно домовима за смештај старијих лица.

¹ У даљем делу ове дисертације биће детаљније изложена статистичка анализа различитих аспеката имунизације становништва на територији Републике Србије.

У оквиру првог круга под ознаком **Фаза 1б** били су обухваћена лица старија од 65 година. Број вакцинисаних грађана у овој категорији (Фаза 1а и Фаза 1б) требало је да обухвати између 75% и 80% пунолетног становништва или око 635.000 особа.

Друга фаза вакцинације (**Фаза 2**) укључивала је лица запослена у различитим државним управама, локалним самоуправама, предшколским установама, правосуђу, Министарству унутрашњих послова, комуналним предузећима као и старија лица која нису обухваћене у претходној фази.

У оквиру треће фазе (**Фаза 3**) вакцинације планирано је да се вакцинише до 75% укупног броја грађана, односно још 446.000 особа више него у претходне две фазе. Трећу групу становништва чине су следеће категорије становништва: просвета (основна школа), особе у здравству и просвети који нису обухваћени у другој фази, тражиоци азила, мигранти смештени у колективном смештају, бескућници као и лица на издржавању казни.

По плану имунизације, циљна група за вакцинацију је била проширена на прве 4 категорије из 3. фазе услед поседовања већег броја вакцина у односу на потребан број за вакцинацију циљних група из прве и друге фазе. Оперативни план за вакцинацију грађана против вируса корона у Републици Србији приказан је у Табели 3.2. Према овом оперативном плану имунизације, од јануара 2021. године вакцинација грађана почела је да се обавља у свим домовима здравља на свакој општини и у одређеним амбулантама у њиховом склопу. Имунизација се вршила на 300 пунктова у већини градова Србије. У граду Београду је масовна вакцинација почела на укупно 18 пунктова, од којих је један био на Београдском сајму, где је омогућено да се на дневном нивоу обави вакцинација за више од 5.000 грађана.

У халама број 11 и број 3 на Београдском сајму били су направљени масовни пунктови, где су биле тачно одређене и означене зоне од самог тренутка уласка до изласка грађана са сајма. У првој зони (означена као **Регистрација**) мерила се температура, након чега је требало попунити формулар којим се даје сагласности за вакцинацију. Следећа зона (означена као **Лекарски преглед**) била је намењена за разговор са лекаром који врши анамнезу, а затим су преко његовог ИТ дела стручна лица вршила унос података о грађанима у информациони систем који је служио као подршка целом процесу имунизације. Трећа зона (означена као **Вакцинација**) представљала је место на коме се вршила вакцинација, као и место на коме су грађани остајали да седе 15 минута како би лекари пратили евентуално појаву негативних последица.

При доласку на вакцинацију грађани су морали да имају личну карту или здравствену књижицу као лични документ ради утврђивања идентитета. Цела процедура је трајала временски јако кратко (око 15 минута), с тим што су исто толико времена грађани

остајали и након вакцинације, по препоруци лекара да у просторији сачекају 15 минута након примљене вакцине. То је била превентивна мера која омогућила да у случају да дође до неочекиване алергијске реакције, грађани могу да приме анти-шок терапију

Табела 3.2. Оперативни план имунизације становништва против COVID-19 у Републици Србији

Фазе	Доступност	Групе становништва
Фаза 1	1–10% популације	<ul style="list-style-type: none"> • здравствени радници, • запослени у установама социјалне заштите и домовима за смештај старијих лица, • старији од 65 у домовима за старе, • сви старији од 75 година, • сви од 65 до 75 година са високим факторима ризика.
Фаза 2	11–20% популације	<ul style="list-style-type: none"> • млађи од 65 година са хроничним болестима и здравственим стањем са високим ризиком, • запослени у државним и локалним службама и установама, • запослени у правосуђу, војсци, полицији, комуналним предузећима, вртићима, средњим школама и факултетима.
Фаза 3	21–50% популације	<ul style="list-style-type: none"> • запослени у основним школама, • запослени у лабораторијама који раде са вирусом корона, • запослени у осталим секторима, • људи угроженог социјалног статуса: бескућници, људи у нехигијенским насељима, затвореници старији од 50 година, тражиоци азила у колективном смештају.

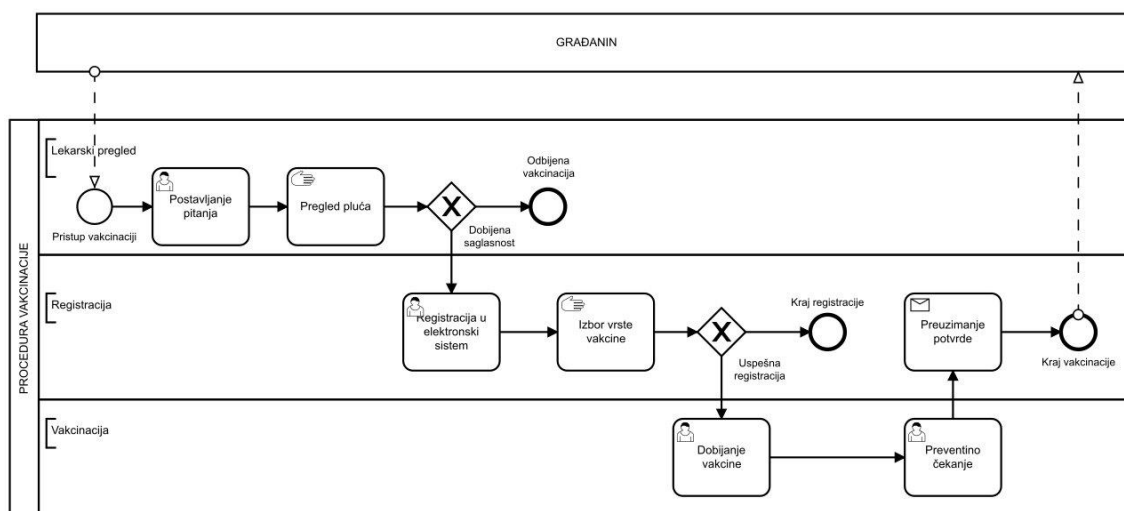


Слика 3.8. Организација пункта за масовну имунизацију – хала 3 Београдског сајма

Комплетну процедуру масовне имунизације грађана спроведену на Београдском сајму (слика 3.8) можемо представити графички помоћу тзв. БПМН (енг. *Business Process*

Modeling Notation – BPMN) нотације (Слика 3.9). Према овој нотацији, процедуру вакцинације чине следећи кораци:

1. На почетку процеса вакцинације потребно је да се грађани јаве дежурној особи која проверава да ли грађани имају заказан термин и коју вакцину желе да приме. Овај процес је максимално убрзан претходним слањем СМС и имејл поруке грађанима. Наиме, порука добијена путем електронске поште садржи предефинисану сагласност за спровођење препоручене вакцинације на којој се налази QR код. Очитавањем овог QR кода дежурна особа може брзо и лако да провери да ли грађанин има заказан термин за вакцинацију, да ли је на добром вакциналном пункту и за коју врсту вакцине је исказао интересовање. Садржај QR кода на предефинисаној сагласности за спровођење препоручене имунизације представљају датум, назив вакциналног пункта и списак вакцина за које је грађанин исказао интересовање.



Слика 3.9. Опис процеса имунизације у БПМН нотацији

2. Затим се обавља процедура где се врши потписивање обрасца и давање сагласност да се прими вакцина. Реч је о стандарду лечења који представља уобичајену праксу, да се приликом пријема у болницу потписује сагласности за прихватање узимања терапије и прихватање ризика терапије. У Србији постоји пракса да се приликом препоручене вакцинације, као и у примеру примања необавезне вакцине, даје сагласност потписивањем одређеног обрасца. Цео овај поступак је максимално убрзан јер су грађанима путем имејла слате предефинисане сагласности које су они могли претходно да одштапају и понесу на вакцинацију. Они грађани који пак нису имали предефинисане сагласности могли су да сагласност испочетка попуне на улазу у пункт за масовну имунизацију (Слика 3.10).

**САГЛАСНОСТ ЗА СПРОВОЂЕЊЕ
ПРЕПОРУЧЕНЕ ИМУНИЗАЦИЈЕ**
(попуњава пацијент)



Држављанство 1) Република Србија ЈМБГ 0705972710281
2) _____
(назив страног држављанства) (бр. пасоша или ЕБС за стране држављане)

Презиме **ЈОВАНОВИЋ** Име **МИХАИЛО** Име родитеља _____

Пол: М. Ж. Датум рођења **07.05.1972.** Место рођења _____

Адреса (улица и број) _____ Место/Насеље _____

Општина/Град **БЕОГРАД - САВСКИ ВЕНАЦ** Тел. фиксни - _____

Тел. мобилни **0112419036** имејл **mihailo72@yahoo.com**

Радни статус: запослен, незапослен, пензионер, ученик, студент, дете

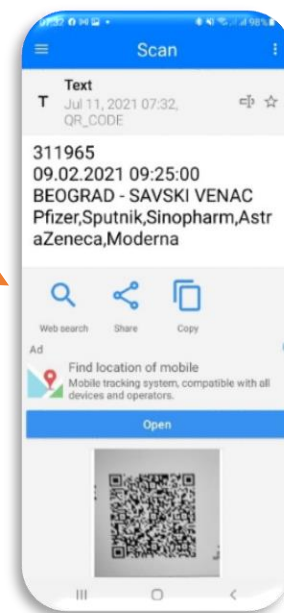
Занимање запосленог: здравствена заштита, социјална заштита, просвета, МУП, Војска РС, друго _____

Корисник установе соц. зашт. ДА, НЕ Назив и општина седишта _____

Изјављујем да: САГЛАСАН САМ, НИСАМ САГЛАСАН (означити) са спровођењем активне/пасивне имунизације (уписати назив имунолошког лека): _____

Лекар ми је објаснио предности и ризике од спровођења активне/пасивне имунизације наведеним имунолошким леком. **ДА**

Потпис пацијента или законског заступника пацијента _____ Датум: **09.02.2021.**



ЕВИДЕНЦИЈА О ВАКЦИНАЦИЈИ ПРОТИВ COVID-19
(попуњава здравствени радник)

Здравствена установа _____ Вакцинацијски пункт _____

Име, презиме, факсимил и бр. телефона лекара: _____

Пре давања вакцине прегледати особу и упознати је са користима и о могућим нежељеним реакцијама после вакцинације. Обавезно уписати сваку дату вакцину и све тражене податке у овај образац и податке унести у лични картон о извршеним имунизацијама и здравствени картон.

Назив вакцине	Датум давања вакцине (V1 i V2)	Назив државља вакцине	Екстремитет	Серија вакцине (лот)	Произвођач	Нежељена реакција	Потпис лекара
		ИМ	1) ДР. 2) ЛР				
		ИМ	1) ДР. 2) ЛР				

Привремене контраиндикације (датум утврђивања и дијагноза): _____

Одлука комисије за трајне контраиндикације (ако постоји, уписати Да) _____

Напомена: Образац се чува као део медицинске документације пацијента.

Слика 3.10. Сагласност за спровођење препоручене имунизације са очитаним QR кодом преко мобилног уређаја

- Потом се врши кратак лекарски преглед (анамнеза), где лекар поставља неколико питања грађанима и врши преглед плућа (Слика 3.11). Лекари постављају питања да ли су грађани хронични болесници, да ли узимају неку терапију, да ли имају неко аутоимуно обољење, да ли су алергични на неки од састојака вакцине, да ли имају неку алергијску реакције на лекове итд. Ако је све у реду, лекар попуњава и потписује приложену сагласност да грађани могу да приме вакцину (лекар попуњава доњи део сагласности – Евиденција о вакцинацији против COVID-19).



Слика 3.11. Пункт за масовну вакцинацију – хала 11 Београдског сајма, сектор у којем лекари узимају анамнезу

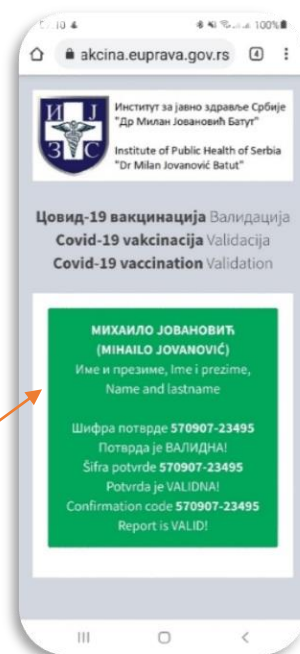
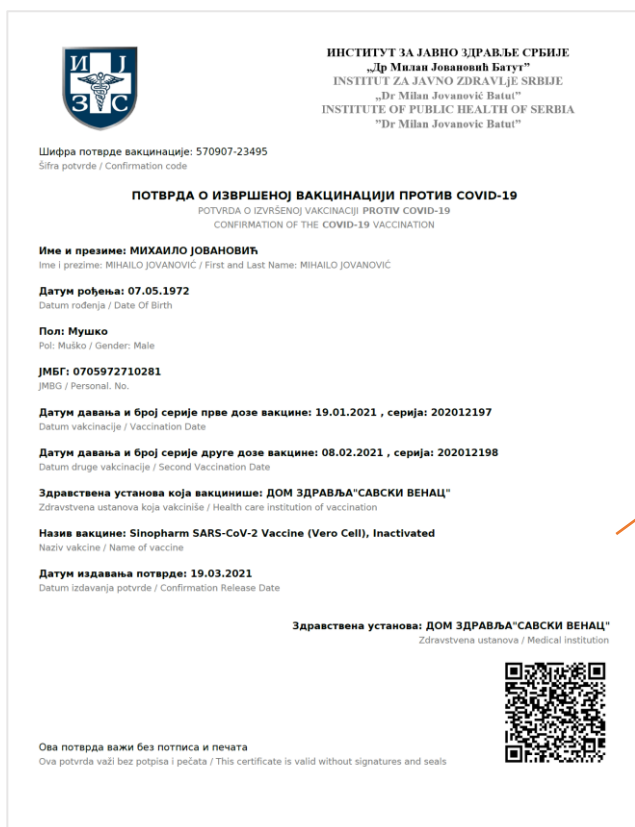
4. Затим следи регистрација грађана у Информационом систему (Слика 3.12) који служи као подршка имунизацији након чега се добија потврда о вакцинацији – давању дозе, односно да су комплетно вакцинисани. Регистрација грађана врши се од стране ИТ службе на пункту за масовну имунизацију (често су то волонтери који помажу у процесу вакцинације грађана), а на потврди о извршеној вакцинацији против COVID-19 бележи се када је примљена прва, а када друга доза вакцине што зависи од врсте произвођача вакцина који у већини случајева препоручују период од 19 до 42 дана за примање друге дозе вакцине. Енглеска вакцина се 12 недеља од примања прве дозе давала вакцинисаним грађанима у Републици Србији, док су се остале врсте (америчко-немачка вакцина, кинеска вакцина и руска вакцина) давале у размаку од три недеље. Такође, на потврди о вакцинацији налази се QR код, чијим читавањем се добија електронска потврда да је документ валидан.



Слика 3.12. Пункт за масовну вакцинацију – хала 3 Београдског сајма, регистрација грађана у Информационом систему који служи као подршка имунизацији против COVID-19

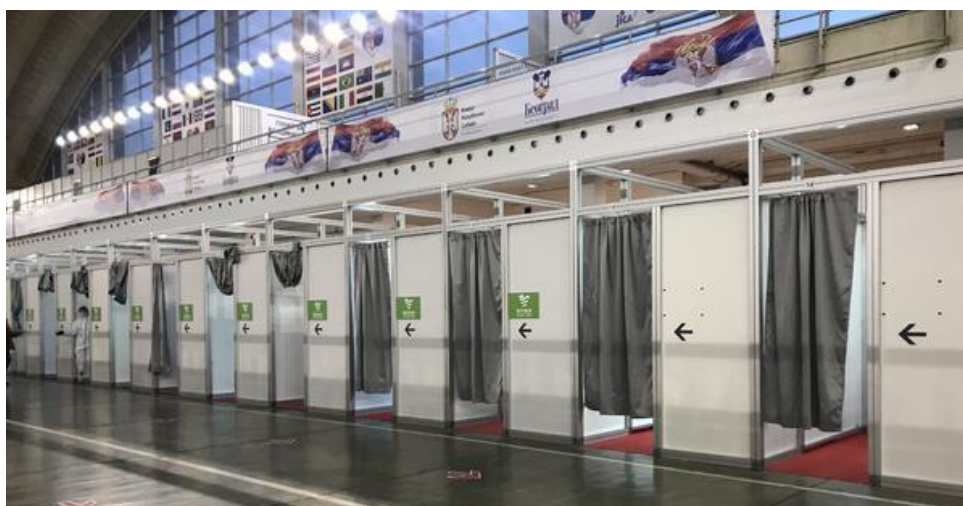
5. Следећи корак је одлазак на саму вакцинацију. Вакцина се даје у горњи део руке, при чему је сама процедура безболна, док је игла занемарљиво мала. Када се прими вакцина, лекари препоручују грађанима да сачекају петнаест минута у просторији ради превенције да не дође до неочекиване алергијске реакције. У случају да до алергијске реакције дође, даје се анти-шок терапија.

Вакцинацијом грађани не стичу одмах имунитет, јер је потребно да се прими и друга доза. Ревакцинација другом дозом вакцине против вируса COVID-19 од стране истог произвођача у Србији је почела 9. фебруара. Међутим, нека истраживања у Великој Британији показују да примање вакцине једног произвођача у првој, а другог у наредној дози може да има позитивне ефекте.



Слика 3.13. Потврда о извршеној вакцинацији против COVID-19

Грађанима је остављена могућност за избор вакцине, тако да је могуће примити допунску дозу, тзв. трећу или бустер дозу, другачију од оних којима су вакцинисани и ревакцинисани. Трећа доза вакцине, односно тзв. *бустер* доза вакцине против корона вируса је почела да се даје од 17. августа 2021. године у Републици Србији.



Слика 3.14. Пункт за масовну вакцинацију – хала 11 Београдског сајма, сектор у којем медицинске сестре дају вакцине

Грађани Републике Србије који су изразили жељу да се вакцинишу против вируса корона од јануара 2021. године, то су могли да ураде на два начина:

1. преко **сервиса за исказивање интересовања за вакцинацију против вируса COVID-19**, који се врши путем Портала еУправа, а након чега се добија порука да је успешно исказано интересовање путем електронске поште и путем СМС поруке,
2. преко **контакт центар за пријављивање** за вакцинацију позивајући телефонски број специјално отворен за ту сврху (0800-222-334).

Касније, када је први талас грађана који се пријавио преко Портала еУправа вакцинисан, Влада Републике Србије је марта 2021. године отворила пунктове и за грађане који нису желели да се пријављују преко Портала или контакт центра.



Слика 3.15. Пункт за масовну вакцинацију – хала 11 Београдског сајма, сектор у којем се грађани задржавају петнаест минута ради праћења евентуалних нежељених ефеката вакцинације

3.2 ИНФОРМАЦИОНИ СИСТЕМ КАО ПОДРШКА ИМУНИЗАЦИЈИ

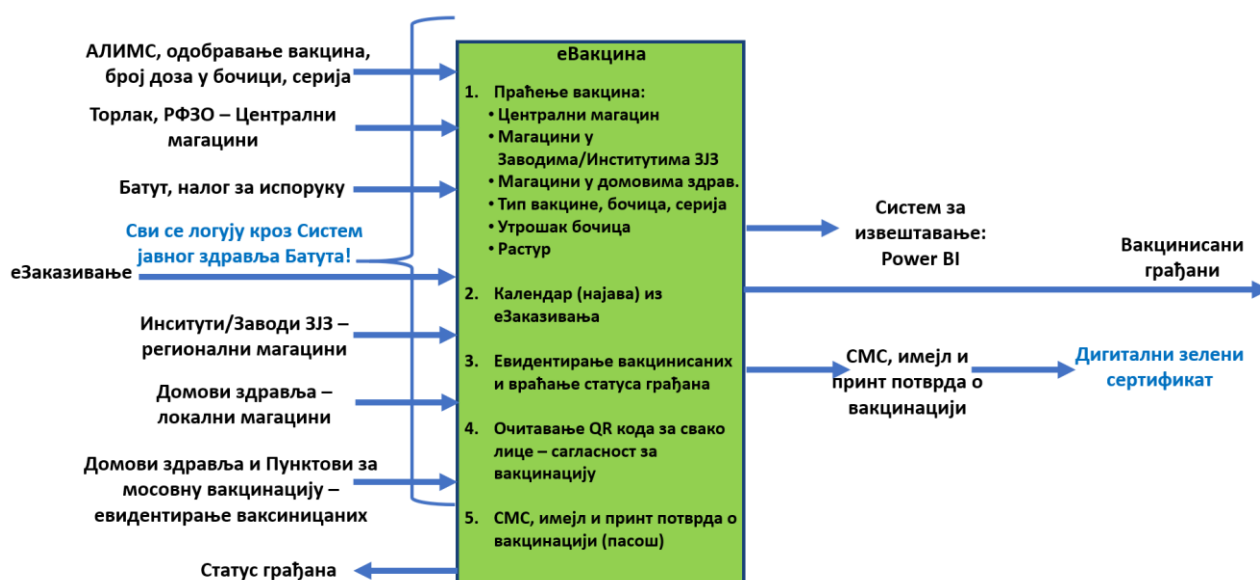
Средином децембра 2020. године, када се знало да прве вакцине против COVID-19 стижу у Србију, по убрзаном поступку је пројектован, тестиран и пуштен у рад нови *Информациони систем као подршка имунизацији*. Овај свеобухватни **информациони систем** је обезбедио логистичку подршку у активностима дистрибуцији сваке бочице вакцине. Систем је пратио сваку бочицу вакцине од тренутка доласка у земљу, преко њеног складиштења и дистрибуције до сваког пункта вакцинације, па све до тренутка њеног давања грађанима. Такође, у њему се чувају подаци о сваком грађанину који се вакцинисао, а систем служи и за организацију имунизације и позивање грађана. Информациони систем се састоји из три дела (Слика 3.16):

1. подсистем за исказивање интересовања грађана за вакцинисање;
2. подсистем за заказивање термина за вакцинисање;
3. подсистем за праћење вакцина и евидентирање вакцинисаних грађана.



Слика 3.16. Три подсистема Информационог система као подршка имунизацији против COVID-19 у Републици Србији

Подсистем за праћење вакцина и евидентирање вакцинисаних грађана, тј. апликација под називом *еВакцина* је централни систем за праћење сваке бочице вакцине у свим сегментима њеног коришћења на територији Републике Србије (Слика 3.17).



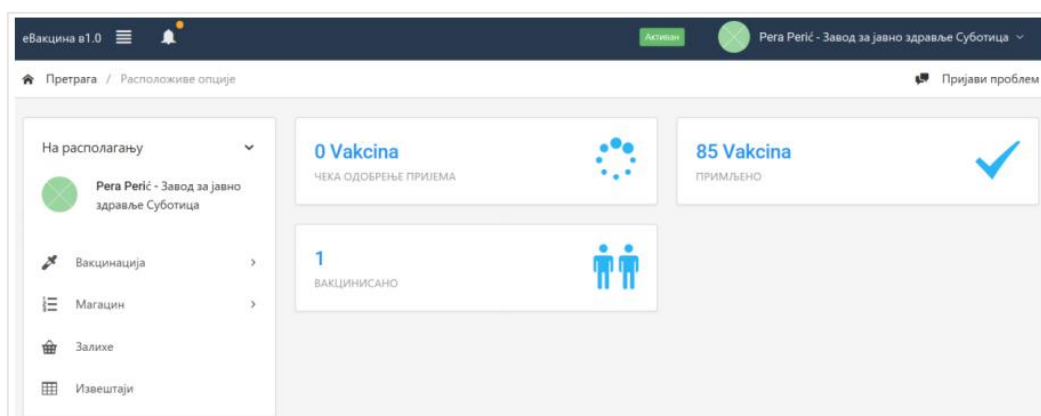
Слика 3.17. Модел података/информација у апликацији *еВакцина*

У овој апликацији свој посао обављају све институције које се налазе у ланцу дистрибуције вакцина:

- **Агенција за лекове и медицинска средства:** институција која одобрава коришћење вакцина, односно врши сертификацију преко документа - Сертификат анализе;
- **Централни магацини за складиштење вакцина:** складиште у чијем саставу су магацини Института за вирусологију, вакцине и серуме „Торлак“, као и магацини Републичког фонда за здравствено осигурање;

- **Институт за јавно здравље Србије „Др Милан Јовановић Батут“:** институција која даје налог за дистрибуцију вакцина према регионалним и локалним магацинима у Србији;
- **Институти и заводи за јавно здравље:** у њима се налази 24 регионалних магацина, као и локални магацини у домовима здравља и на пунктовима за масовну имунизацију.

Такође, апликација *еВакцина* подржава и саму функционалност система која је битна за управљање подацима о стању залиха вакцина у магацинима, али и грађанима који су вакцинисани.



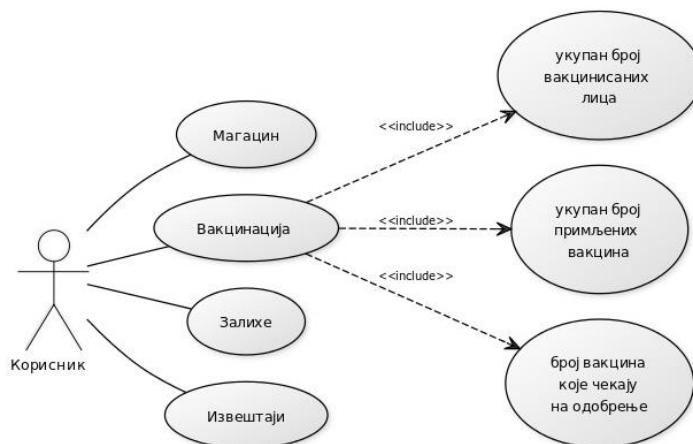
Слика 3.18. Почетна страна апликације *еВакцина* након успешне пријаве корисника

Апликација *еВакцина* (Корисничко упуство за коришћење WEB апликације *еВакцина*, 2020) је намењена свим лицима који су укључени у процес дистрибуције вакцина против болести COVID-19, као и лицима која евидентирају имунизоване грађане. Апликација је доступна запосленима у здравственом систему путем веб сервиса института "Др Милан Јовановић Батут" (Институт за јавно здравље, 2021). Пријављивање корисника у апликацију врши се преко дате адресе. Након успешног пријављивања корисника приказује се почетна страница апликације (Слика 3.18). При неуспешном пријављивању, корисник ће бити враћен на почетни прозор.

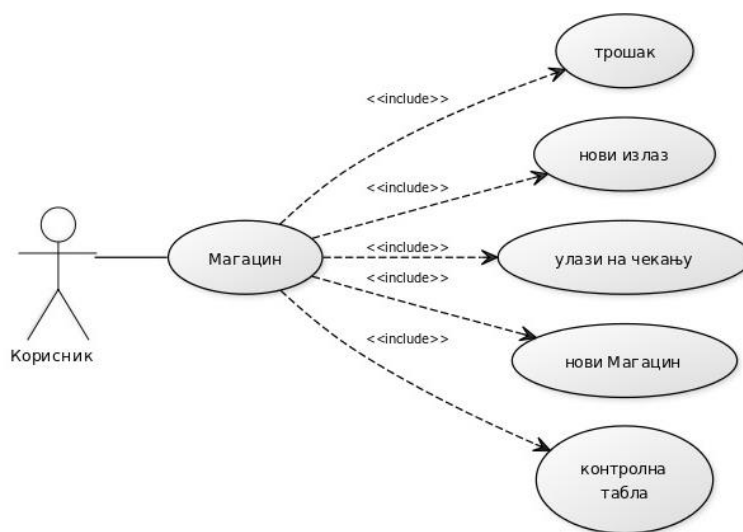
3.2.1 Праћење вакцина

На почетној страни апликације *еВакцина* кориснику се приказује функционалност праћења вакцина којим се стиче увид о укупном броју вакцина које чекају на одобрење пријема у магацин установе, броју примљених вакцина и вакцинисаних лица (Слика 3.19). При избору опције *Магацин* (Слика 3.20) корисник може да изабере једну од понуђених подопција:

1. преглед контролне табле са које може да отвори почетну страну апликације еВакцина;
2. додавање новог магацина;
3. преглед и управљање улазима/пријемима на чекању;
4. управљање излазима из магацина;
5. управљање утрошком у магацину.



Слика 3.19. Дијаграм случаја коришћења на почетној страни апликације еВакцина



Слика 3.20. Дијаграм случаја коришћења на почетној страни апликације Магацин

3.2.1.1 Додавање новог магацина

Избором подопције *Нови магацин* кориснику се пружа могућност да изврши унос новог магацина установе, а уједно има могућност увида у постојеће магацине установе (Слика 3.21). Да би омогућио унос новог магацина за своју установу, корисник треба да попуни поље *Назив (опис) магацина* након чега бира дугме *Додај магацин*. Поља *Врста магацина* и *Установа* су аутоматски попуњена од стране апликације *еВакцина* и није их

могуће изменити. У случају да корисник остави празно поље *Назив (опис) магацина*, апликација ће сама доделити назив магацина, односно поставља подразумевану вредност прочитану из базе података *Централни магацин установе*. Након притиска на дугме *Додај магацин* апликација *еВакцина* ће извршити упис магацина у базу података и учинити га доступним кроз апликацију. То значи да ће магацин бити видљив надређеним магацинима (централним магацинима) и другим магацинима на нивоу саме установе. Дакле, осим подразумеваног *Централног магацина установе*, корисник може дефинисати и друге магацине, у складу са својом интерном организацијом и назвати их адекватним описима. Уколико корисник покуша да упише назив магацина који већ постоји у бази података установе, апликација *еВакцина* ће приказати адекватну грешку.

The screenshot shows a web application interface for managing warehouses. At the top, there are three input fields: 'Врста магацина' (Warehouse type) with a dropdown menu showing 'Institut / Zavod za...', 'Установа' (Institution) with a dropdown menu showing 'ИНСТИТУТ ЗА ВИРУСОЛОГИЈУ, ВАКЦИНЕ И С...', and 'Назив (опис) магацина' (Name (description) warehouse) with a text input field containing 'Централни магацин установе'. To the right of these fields is a blue button labeled 'Додај магацин' (Add warehouse). Below this is a section titled 'Постојећи магацини' (Existing warehouses). It features a search filter labeled 'Филтер:' with a text input field 'Унесите текст...' and a magnifying glass icon. To the right of the filter is a 'Прикажи:' (Show) dropdown menu set to '10'. Below the filter is a table with the following data:

#	Врста магацина	Установа	Назив (опис) магацина
1	Institut / Zavod za javno zdravlje	ИНСТИТУТ ЗА ВИРУСОЛОГИЈУ, ВАКЦИНЕ И СЕРУМЕ ТОРЛАК	Централни магацин установе

At the bottom of the table, it says 'Приказано 1 до 1 од укупно 1 редова' (Showing 1 to 1 of a total of 1 rows). There is a pagination control showing '1' in a box.

Слика 3.21. Додавање новог магацина и увид у постојеће магацине

3.2.1.2 Преглед и управљање улазима/пријемима на чекању

Избором подопције *Улази на чекању* апликација *еВакцина* приказује прозор који омогућава увид у све улазе, односно пријеме који чекају на одобрење установе, као и њихове статусе (Слика 3.22). До прозора *Улази на чекању* може се доћи и посредством опције *Чека одобрење пријема*, која се налази на страници *Контролна табла*. Преко овог прозора, корисник поред увида у статус пријема који чекају на потврду такође има могућност да одлучи да ли жели да потврди или одбије конкретни пријем. Одабиром статуса *Није потврђен пријем* (Слика 3.22), кориснику се приказује обавештење за потврду или отказ пријема. Ако корисник не жели да потврди нити да откаже пријем робе, потребно је да одабере дугме *Затвори* којим затвара отворен прозор. У случају да корисник жели да откаже пријем робе, тада бира опцију *Не, откажи пријем!* при чему се приказује ново обавештење. Уколико корисник не жели да поништи пријем робе, потребно је да кликне на дугме *Одустајем*. И на крају, корисник треба да попуни разлог отказивања пријема уколико жели да поништи пријем. У том случају врши се одабир дугмета *Поништи пријем* при чему

пријем нестаје са списка пријема који чекају одобрење а обавештење се шаље према магацину који је иницијално упутио одређену количину вакцина. Уколико корисник жели да потврди пријем робе, тада бира опцију *Не, потврђујем пријем*. Избором ове опције појављује се ново обавештење где апликација захтева од корисника да потврди своју одлуку. Ако корисник жели да одустане од своје одлуке да потврди пријем робе, тада је неопходно да се одабере дугме *Затвори*. Уколико корисник жели да коначно потврди пријем робе, тада треба да кликне на дугме *Да, потврђујем пријем* при чему се залиха предметне вакцине увећава за количину која је била наведена у самом пријему.

#	Врста улаза	Датум улаза	Вакцина	Количина	Статус
1	Улаз из магацина Централни магацин 1 (Mag1)	27.12.2020	Vakcina XYZ (serija: MJ123)	20.00	Није потврђен пријем

Слика 3.22. Дијалог прозор за увид у пријеме вакцина на чекању

3.2.1.3 Управљање излазима из магацина установе

Избором опције *Нови излаз* апликација *eВакцина* ће приказати прозор преко кога се врши увид у све реализоване излазе, односно статусе сваког појединачног излаза, као и могућност за унос новог излаза из магацина установе. Под статусом појединачног излаза подразумева се један од три понуђена: *Није потврђен пријем другог магацина*, *Отказан пријем другог магацина* и *Потврђен пријем другог магацина*.

#	Датум излаза	Упућено магацину	Вакцина	Количина	Статус
1	27.12.2020	Дом здравља "Др Јанаш Хаџи" Бачка Топола (Mag1)	Vakcina XYZ (serija: MJ123)	5.00	Није потврђен пријем другог магацина
2	27.12.2020	Дом здравља "Др Јанаш Хаџи" Бачка Топола (Mag1)	Vakcina XYZ (serija: MJ123)	5.00	Отказан пријем другог магацина
3	26.12.2020	Завод за јавно здравље Суботица (Суботица магацин)	Vakcina Covid19 - Kina (serija: 1147)	14.00	Потврђен пријем другог магацина
4	21.12.2020	Дом здравља "Др Јанаш Хаџи" Бачка Топола (Mag1)	Фајзер (serija: 12345)	40.00	Потврђен пријем другог магацина

Слика 3.23. Дијалог прозор за управљање излазима из магацина установе

Поред могућности за креирање новог излаза, корисник има на располагању могућност за увид у статусе појединачних излаза из свог магацина. Статуси обојени зеленом бојом су само информације о успешно извршеном трансферу. Са друге стране, статуси обојени наранџастом бојом представљају информацију о отказаном пријему од стране другог магацина, при чему избором тог статуса корисник може добити увид у разлог отказивања пријема. Статуси означени црвеном бојом пружа информацију да други магацин није обрадио пријем робе што значи да га још није потврдио, односно није га отказао.

Попуњавањем форме приказане на Слици 3.23 врши се креирање новог излаза. Да би се евидентирао нови излаз, неопходно је да корисник изабере магацин са кога има право да скида залихе конкретне вакцине. У следећем кораку, корисник треба да изабере магацин којем се упућује одређена количина конкретне вакцине. Трећи корак представља избор вакцине, док четврти (последњи) корак јесте унос количине коју треба испоручити другом магацину. При креирању новог излаза постоје два сценарија и то:

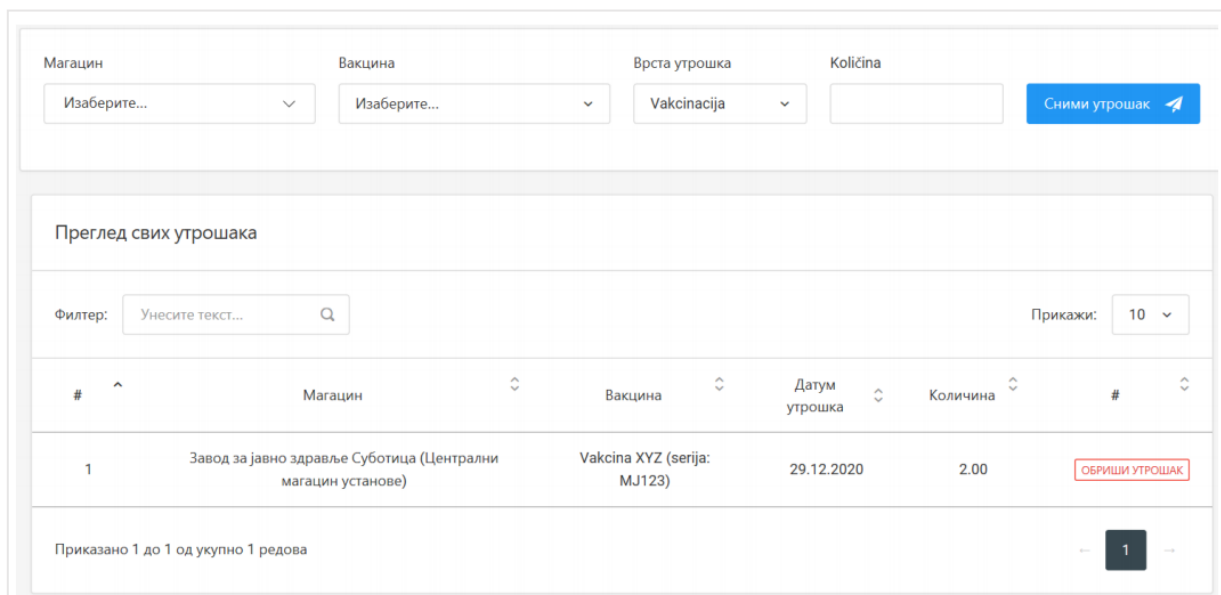
- Први сценарио: корисник покушава да испоручи одређену количину конкретне вакцине, при чему нема довољно вакцина на стању. Апликација тада приказује обавештење „*Немате довољно вакцина на стању*“.
- Други сценарио: корисник покушава да испоручи одређену количину конкретне вакцине коју има на стању у довољној мери. У том случају, систем приказује обавештење „*Дозвољава се излаз из магацина. Стање магацина након испоруке ће износити: 15 вакцина тин/серија: Vakcina XYZ (serija: MJ123)*“.

Уколико корисник апликације *eВакцина* не жели да потврди испоруку вакцина другом магацину, неопходно је да одабере дугме *Одустани*. Ако жели да потврди испоруку према другом магацину, неопходно је да се активност потврди са дугметом *Да*. Овом акцијом стање залиха конкретне вакцине у конкретном магацину се смањује за задату количину.

3.2.1.4 Управљање утрошком у магацину

Избором опције *Утрошак* апликација *eВакцина* ће приказати прозор са увидом о реализованим утрошцима, односно биће приказан утрошак евидентираних лица које је у конкретној установи задужено за управљање стањем залиха у магацину. Такође, преко овог прозора омогућено је магационеру евидентирање физичког утрошка бочица вакцина на дневном нивоу. Уколико се жели унети нови утрошак, неопходно је попунити форме описане у горњем делу Сlike 3.24. Лице задужено за управљање магацином мора да изабере магацин на који се утрошак односи, вакцину која је утрошена, врсту утрошка (вакцинисано лице или растур), као и утрошену количину. Ако корисник покуша да евидентира утрошак

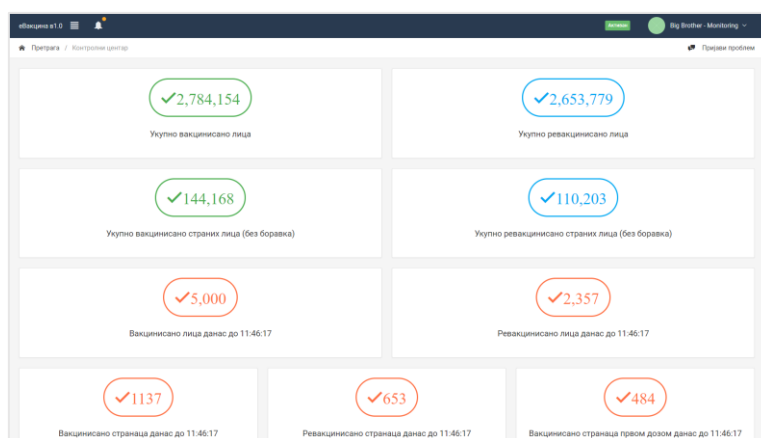
који је већи него доступно стање залиха конкретног магацина, онда апликација *еВакцина* приказује одговарајућа обавештења и неће дозволити чување ново унетог утрошка. У супротном, апликација ће дозволити чување утрошка. Уколико корисник утврди да је унео погрешан утрошак, на располагању му је опција *Обриши утрошак*. Избором ове опције на стање залиха ће бити враћена количина вакцина (у бочицама) која је претходно евидентирана као утрошак.



Слика 3.24. Дијалог прозор за унос нових утрошакa и увид у евидентиране утрошке у апликацији *еВакцина*

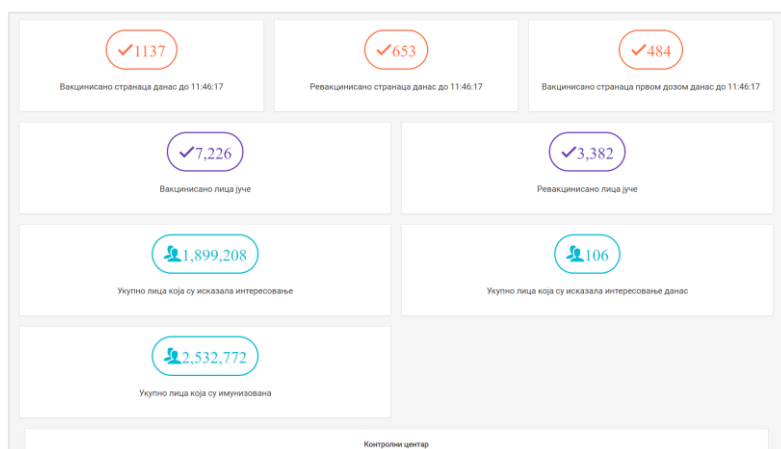
3.2.1.5 Извештавање

Апликација *еВакцина* садржи прозор *Контролни центар* (Слика 3.25). Преко овог прозора омогућено је брзо извештавање о укупном броју вакцинисаних грађана, укупном броју вакцинисаних страних лица који немају боравиште у Републици Србији, и сличним подацима.



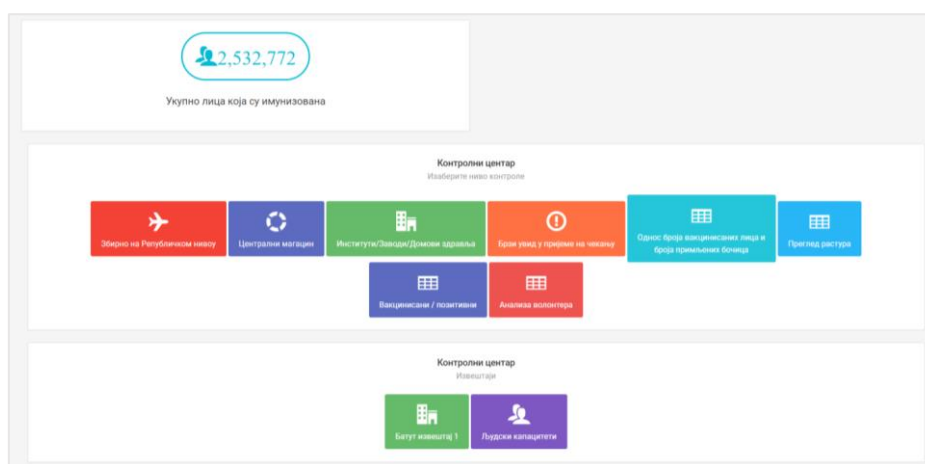
Слика 3.25. Прва страница *Контролног центра* у апликацији *еВакцина*

У оквиру прозора *Контролни центар* налазе се подаци о броју вакцинисаних грађана претходног дана, као и подаци о броју грађана који су исказали интересовање за вакцинисање, и то укупан број и на дневном нивоу, као на Слици 3.26.



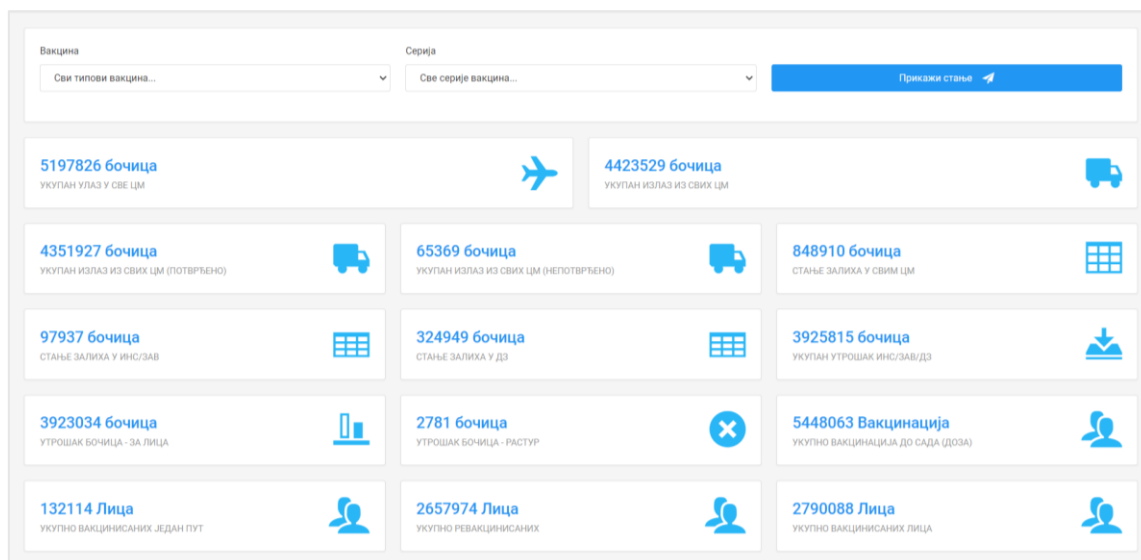
Слика 3.26. Друга страница Контролног центра у апликацији *eВакцина*

На крају, прозор *Контролни центар* садржи посебне извештаје који служе за праћење дистрибуције вакцина на територији целе Србије, стање централних магацина, стање регионалних магацина (у институтима и заводима за јавно здравље), брз увид у пријеме на чекању у магацинима, однос броја вакцинисаних лица и броја примљених бочица, и бројне друге извештаје неопходне за ефикасан рад Института за јавно здравље Србије у доба пандемије (Слика 3.27).



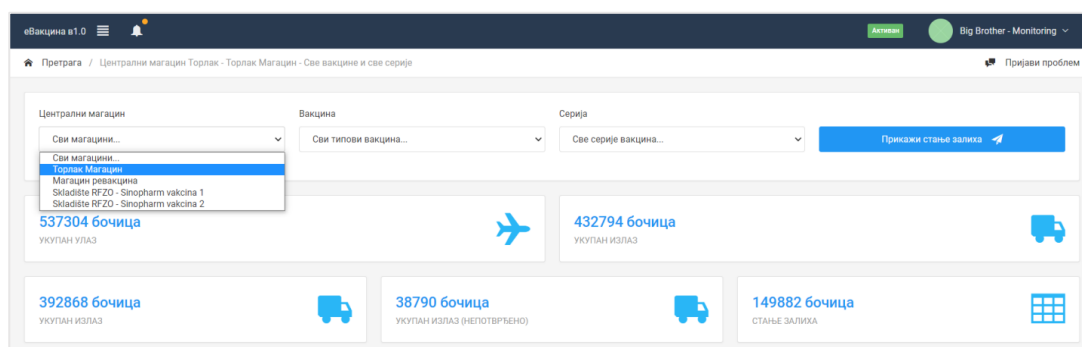
Слика 3.27. Трећа страница Контролног центра у апликацији *eВакцина*

Праћење дистрибуције вакцина на територији целе Србије у Контролном центру апликације *eВакцина* такође омогућава увид у податке као што су: укупан број примљених бочица у централне магацине, укупан број издатих бочица из централних магацина, стање залиха у свим централним магацинима, регионалним магацинима и домовима здравља, укупан утрошак бочица, као и број вакцинисаних и ревакцинисаних грађана (Слика 3.28).



Слика 3.28. Трећа страница Контролног центра у апликацији eВакцина

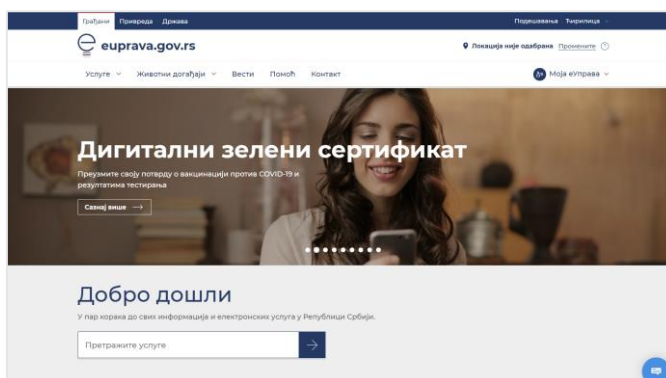
Најзад, од значаја је и праћење стања централних магацина у Контролном центру апликације eВакцина, које омогућава једноставан увид у број примљених и издатих бочица, као и стање залиха за сваки од централних магацина (Слика 3.29).




Слика 3.29. Праћење стања централних магацина у Контролном центру апликације eВакцина

3.2.2 Евидентирање вакцинисаних грађана


Када лице прими вакцину, свеједно да ли је реч о првој, другој или трећој (бустер) дози, сервис као други део апликације eВакцина евидентира сваког грађанина у систем (Слика 3.30). Након примања сваке дозе грађанима је омогућено да преузму потврду о извршеној вакцинацији као и потврду која осим података садржи информације везане за различита тестирања на COVID-19, тј. Дигитални зелени сертификат (Слика 3.31). Обе потврде је могуће добити и аутоматски преко електронске поште, док се потврда о извршеној вакцинацији штампа издаје и у папирној форми на самом пункту за вакцинацију. Уколико неко изгуби потврду о извршеној вакцинацији против COVID-19, може поново да је добије коришћењем Портала eУправе.



Слика 3.30. Електронска услуга добијања Дигиталног зеленог сертификата на Порталу еУправа



ДИГИТАЛНИ ЗЕЛЕНИ СЕРТИФИКАТ
 Потврда о извршеној вакцинацији против COVID-19 и резултатима тестирања
DIGITAL GREEN CERTIFICATE
 Certificate of vaccination against COVID-19 and test results



РЕПУБЛИКА СРБИЈА
 REPUBLIC OF SERBIA


Број сертификата / Certificate ID: 714270/21	Датум и време издавања сертификата / Certificate issuing date and time: 18.07.2021. 16:06:09
Име и презиме / Name and surname: MIHAILO JOVANOVIĆ	
Датум рођења / Date of birth: 07.05.1972.	ЈМБГ / Personal No. / EBS: 0705972710281
Пол / Gender: Muško/Male	Број пасоша / Passport No. Издат од / Issued by: 01234567, SRB

Вакцинација / Vaccination	
Доза / Dose: 1 / 2 Тип / Type: Sinopharm Произвођач и серија / Manufacturer and batch number: BEIJING INSTITUTE OF B.P. CO., LTD, 202012197 Датум / Date: 19.01.2021. Здравствена установа / Health care institution: DOM ZDRAVLJA"SAVSKI VENAC"	Доза / Dose: 2 / 2 Тип / Type: Sinopharm Произвођач и серија / Manufacturer and batch number: BEIJING INSTITUTE OF B.P. CO., LTD, 202012198 Датум / Date: 08.02.2021. Здравствена установа / Health care institution: DOM ZDRAVLJA"SAVSKI VENAC"

SARS-CoV-2 RT Real-time PCR	SARS-CoV-2 Ag-RDT (Antigen Rapid Detection test)	SARS-CoV-2 RBD S-Protein Immunoglobulin G (IgG) test
Врста узорка / Sample type: N/A	Врста узорка / Sample type: N/A	Врста узорка / Sample type: N/A
Произвођач теста / Test manufacturer: N/A	Произвођач теста / Test manufacturer: N/A	Произвођач теста / Test manufacturer: N/A
Датум и време узорковања / Date and time of sampling: N/A	Датум и време узорковања / Date and time of sampling: N/A	Датум и време узорковања / Date and time of sampling: N/A
Датум и време издавања резултата / Date and time of result: N/A	Датум и време издавања резултата / Date and time of result: N/A	Датум и време издавања резултата / Date and time of result: N/A
Резултат / Result: N/A	Резултат / Result: N/A	Резултат / Result: N/A
Лабораторија / Laboratory: N/A	Лабораторија / Laboratory: N/A	Лабораторија / Laboratory: N/A


Потврда о преležаној болести COVID-19 / Confirmation of COVID-19 recovery

Датум позитивног теста - лабораторија /
Date of positive test - laboratory: **N/A**



Сертификат издаје:
Институт за јавно здравље Србије
"Др Милан Јовановић Батут"
Certificate issued by:
 Institute of Public Health of Serbia
 "Dr Milan Jovanović Batut"

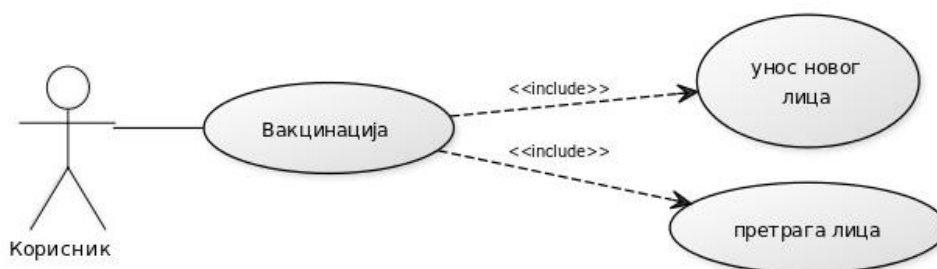
Дигитални потпис / Digitally signed by:



РЕПУБЛИКА СРБИЈА
 Влада Републике Србије
 Канцеларија за информационе
 технологије и електронску управу
 Немањина 11, БЕОГРАД
 Датум: 18.07.2021. 16:06:09

Слика 3.31. Пример потврде - Дигитални зелени сертификат

Избором опције *Вакцинација* у апликацији *еВакцина*, корисник има на располагању могућност за унос новог лица и могућност за претрагу лица, као што се може уочити на Слици 3.32.



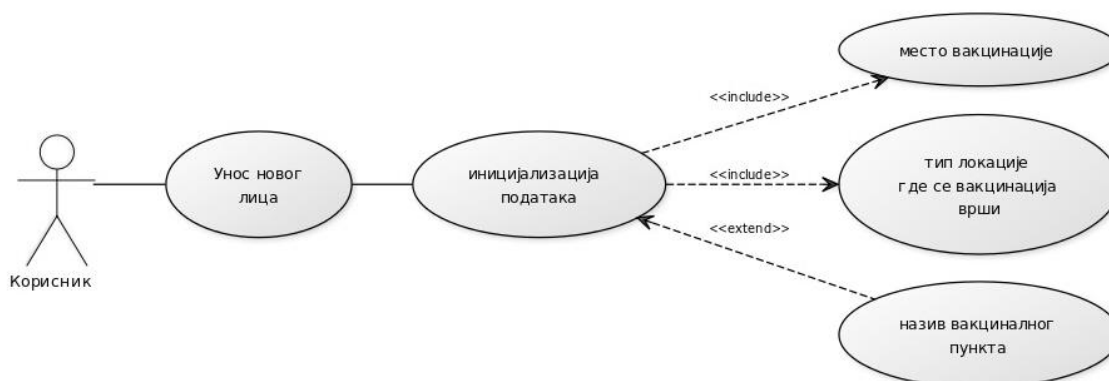
Слика 3.32. Дијаграм случаја коришћења на почетној страни функционалности *Вакцинације* у апликацији *еВакцина*

Избором опције *Унос новог лица* апликација ће приказати страницу која омогућава унос новог лица у базу података ради евидентирања података о вакцинацији (Слика 3.33).

The screenshot shows a web form for adding a new person. It contains three dropdown menus at the top: 'Место вакцинације' (Vaccination location) with 'Суботица' selected, 'Тип локације' (Location type) with 'Здравствена установа' selected, and 'Назив вакциналног пункта' (Vaccination point name) with 'Isturena ambulenta' entered. Below these is a text input field for 'Идентификациона ознака' (Identification mark) with a placeholder 'Унесите ЈМБГ лица, ЛБО, Број здравствене исправе или ЕБС ако је лице страни држављанин' and a blue 'Тражи' (Search) button. At the bottom, there is a dropdown for 'Лице је:' (Person is:) with 'Држављанин РС' selected.

Слика 3.33. Дијалог прозор за унос новог лица у апликацију *еВакцина*

У првом реду опције за унос новог лица од корисника се очекује да иницијализује податке о месту вакцинације, затим о типу локације где се вакцинација врши и опционо о називу вакциналног пункта (Слика 3.34). Једном дефинисане наведене вредности биће запамћене од стране апликације *еВакцина* све до наредне измене.



Слика 3.34. Дијаграм случаја коришћења апликације за унос новог лица

Како би брзо и ефикасно унео све потребне податке о лицу које се вакцинише, корисник уписује идентификатор лица у поље *Идентификациона ознака*, након чега треба да кликне на дугме *Тражи*. Идентификационе ознаке подразумевају:

- јединствени матични број грађанина – ЈМБГ;
- лични број осигураника – ЛБО;
- број здравствене картице;
- евиденцијски број за странце – ЕБС или број пасоша: уколико је реч о страном држављанину са боравком у Републици Србији или ако је у питању страни држављанин које нема место пребивалишта у Републици Србији.

Уколико лице већ постоји у систему, систем ће приказати одговарајуће обавештење са опцијом да се у једном кораку корисник преусмери у раније отворен картон вакцинације лица. Уколико лице не постоји у бази података од раније, апликација *еВакцина* ће извршити проверу доступних база података и кориснику исписати податке о лицу које је потребно потврдити притиском на дугме *Да, желим!* (Слика 3.35).

Слика 3.35. Прозор са подацима о лицу које се по први пут уписује у апликацију *еВакцина*

Избором опције *Претрага лица* апликација *еВакцина* ће приказати страницу која омогућава претрагу лица која су раније евидентирана од стране корисника апликације или корисника који одговара истој установи као и уловани корисник (Слика 3.36). Уносом неког од идентификатора лица и притиском на дугме *Тражи* апликација *еВакцина* ће приказати списак резултата у делу под називом *Резултат претраге*. Уколико се у резултату претраге нађе жељено лице, довољно је изабрати његово име и презиме, након чега ће се

отворити картон вакцинације лица. Извештај поред имена, презимена и ЈМБГ-а, садржи и преглед датума досадашњих вакцинација лица.

Претрага лица у бази података

ЈМБГ, ЛБО, Број здравствене исправе или ЕБС ако је лице страни држављанин Тражи

Резултат претраге

Уносом жељеног критеријум у поља за претрагу и кликом на дугме "Тражи" приказаће се подаци о лицима која задовољавају критеријум претраге.

#	Лице	Историја тестирања
---	------	--------------------

Слика 3.36. Дијалог прозор за претрагу лица у апликацији еВакцина

3.3 ПОДСИСТЕМ ЗА ИСКАЗИВАЊЕ ИНТЕРЕСОВАЊА ГРАЂАНА ЗА ВАКЦИНИСАЊЕ ПРОТИВ COVID-19

Посебан подсистем, који је грађанима био добро познат током јека пандемије, јесте управо систем за *Исказивање интересовања за вакцинисање против COVID-19* (слика 3.37). Помоћу овог система грађани су могли да искажу интересовање за вакцинацију електронским путем преко Портала еУправа или телефонским путем преко контакт центра који је био посебно успостављен за ове намене на броју 0800-222-334.



Слика 3.37. Модел података/информација у подсистему за Исказивање интересовања за вакцинацију против COVID-19

. Након исказивања интересовања грађанима је био достављан позив по приоритетним групама, при чему су на почетку приоритет имала лица старија од 75 година, затим грађани од 65 до 74 година старости, а онда и друге категорије као што су војска, полиција итд. Обавештење о времену и месту вакцинације грађани су добијали преко електронске поште и путем СМС поруке.

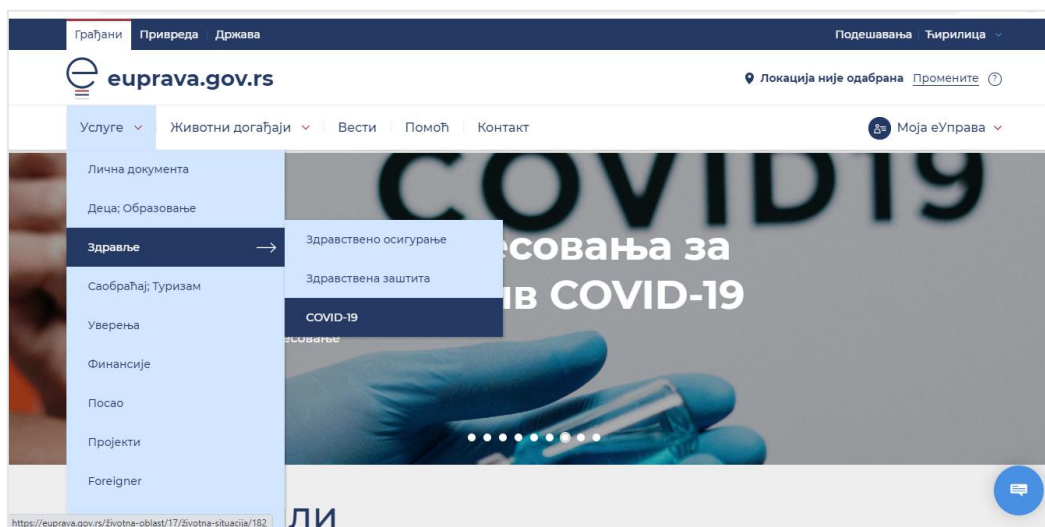
У циљу ефикасне наплате пореза, као и остваривања контроле уплата на територији Републике Србије, постоји централни регистар (Слика 3.38) под називом *Централни регистар обавезног социјалног осигурања (ЦРОСО)*. Овај регистар формиран је у складу са чланом 10. (став 1. тачка 2) и чланом 25. *Закона о Централном регистру обавезног социјалног осигурања* од 1. јануара 2021. године. Њиме су такође уређене надлежности за руковођењем *Регистра запослених и других ангажованих лица код корисника јавних средстава*. Укрштањем матичних бројева и података из ЦРОСО долази се до информација о лицима која су запослена код корисника јавних средстава, као што је, на пример, просвета. На тај начин може се доћи до информација које лице ради у ком сектору или којој делатности. Повезивање ЦРОСО са подсистемом за Исказивање интересовања за вакцинисање био је од непроцењивог значаја за приоритетно позивање оних грађана који раде у специфичним делатностима.



Слика 3.38. Почетна страна Портала ЦРОСО.

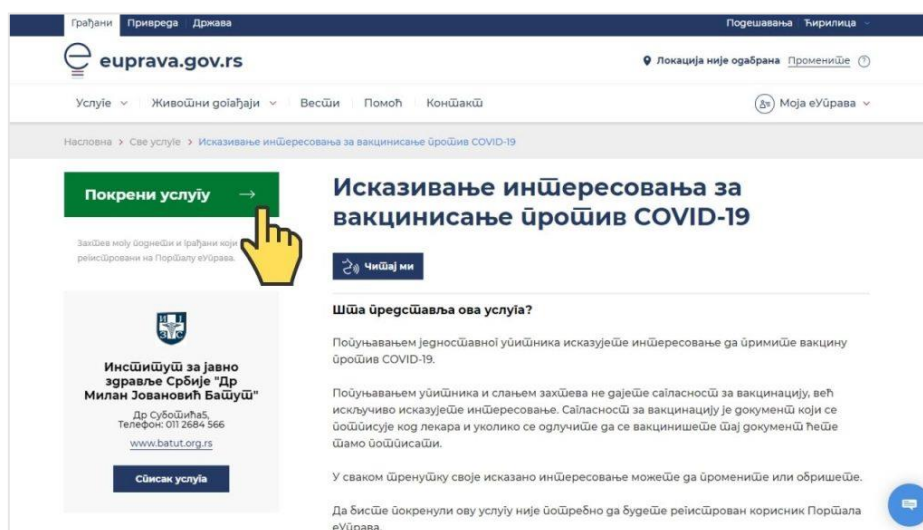
Преко Портала еУправе, сви грађани Републике Србије од 11. јануара 2021. године добили су могућност да своје интересовање за вакцинисање искажу попуњавањем једноставног упитника. Да би се лице пријавило за вакцинацију, није било потребе да оно буде регистровано као корисник са еИД. Довољно је да се преко Портала одабере опција *Услуге*, а затим секција *Здравље*, као на Слици 3.39. У оквиру ове секције, понуђене су три опције: *Здравствено осигурање*, *Здравствена заштита* и *COVID-19*. При избору опције *COVID-19*, на дну секције приказује се опција *Исказивање интересовања за вакцинацију против COVID-19*. У оквиру ове секције поред брзе претраге постоје и друге подуслуге у вези пандемије *COVID-19*, и то:

- **Обавести ме да ли је готов PCR тест на COVID-19:** сервис који аутоматски 24 часа дневно шаље обавештење путем електронске поште и СМС порука. Послато обавештење садржи искључиво информацију о томе да ли је тест готов или не. Резултати теста (искључиво о PCR тестовима) нису део тог обавештења.
- **Исказивање интересовања за вакцинисање против COVID-19:** сервис са једноставним упитником помоћу кога се исказује интересовање за примање вакцине. Исказано интересовање је могуће променити или обрисати из система. У случају да се грађани одлуче за вакцинацију, потписује се посебан документ а то не представља дати упитник.
- **Пропуштен термин за вакцинацију:** услуга намењена лицима који нису могли да се појаве у заказаном термину, а претходно су добили позив путем електронске поште и СМС поруком. У том случају, грађани су путем ове услуге могли да искажу ново интересовање за вакцинацију попуњавањем свих обавезних поља ради добијања новог термина. Постојао је опциони избор да еУправа сама закаже било који термин или да сам грађанин постави датум после кога може да прими вакцину.
- **Дигитални зелени сертификат за странца:** потврда као доказ за странце који су примили вакцину против вируса. Ова услуга је намењена свим страним држављанима, без боравка у Републици Србији, који су примили обе дозе вакцине у Србији. Потврда садржи електронски печат, што значи да је не може бити злоупотребљена или фалсификована.
- **Дигитални зелени сертификат:** потврда као доказ о примљеној вакцини против пандемије COVID-19, у случају обољевања садржи податке о резултату тестирања или опоравка од болести вируса SARS-CoV-2.



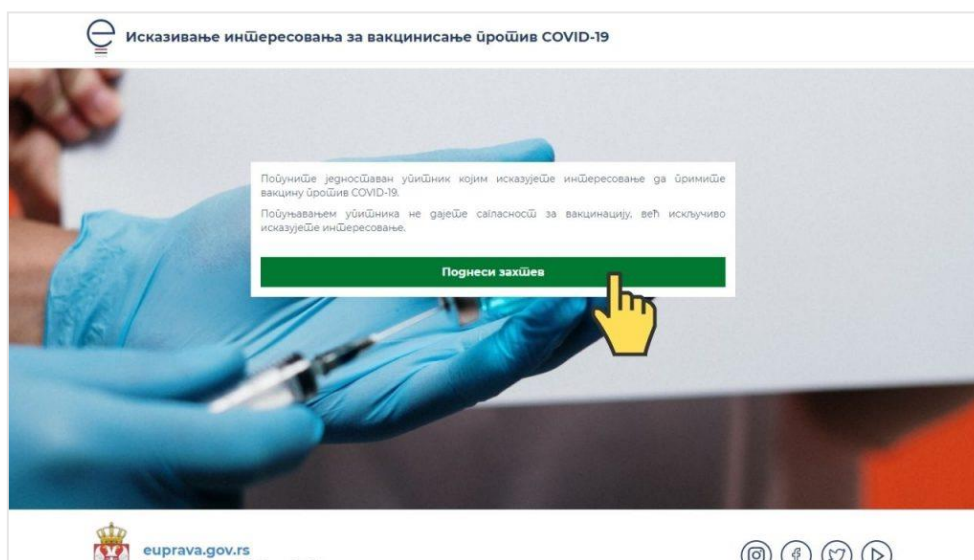
Слика 3.39. Избор групе услуга COVID-19 са почетне страна Портала еУправа

Да би грађанин исказао интересовање и том приликом попунио упитник на Порталу, треба одабрати дугме *Покрени услугу*, као што је приказано на Слици 3.40.



Слика 3.40. Избор услуге Исказивање интересовања за вакцинације преко Портала еУправа

Да би се попунио упитник, заинтересовано лице треба да одабере дугме *Поднеси захтев*, као на Слици 3.41. Након тога добија се додатно обавештење грађанима да упитник који је неопходно попунити није исто што и документ о давању сагласности за примање вакцине.



Слика 3.41. Обавештење о упитнику при исказивању интересовања за вакцинације


Специфичност вакцинације у Републици Србији је била да сами грађани могу да одаберу неку од тада понуђених (доступних) типова вакцине коју су грађани преко упитника могли да изаберу. Списак доступних вакцина је издавала Агенција за лекове и медицинска средства (АЛИМС) која је водила рачуна и о ефикасности и безбедности тих вакцина. Као вид битних података било је неопходно навести и специфична обољења или

здравствени проблем који онемогућавају лицу да изађе из куће. У делу за држављанство, понуђене су биле три опције за избор:

1. држављанин Републике Србије,
2. страни држављанин са боравком у Републици Србији,
3. страни држављанин без места боравка у Републици Србији.

На овај начин, држава Србија је пружила могућност за вакцинисање не само својим грађанима већ и страним држављанима, а посебно становницима држава региона југоисточног Балкана.

Посебан део Портала еУправа давао је напомену о обавезним подацима који морају да се оставе приликом попуњавања упитника, а то су били електронска пошта и број телефона. Ови подаци су омогућавали да свако ко попуни упитник буде обавештен о термину вакцинације (Слика 3.42).

 **Исказивање интересовања за вакцинисање против COVID-19**

Исказивање интересовања за вакцинисање против COVID-19

Одаберите опцију:

Држављанин Републике Србије

ЗМБГ (*)

Име (*)

Презиме (*)

Адреса електронске поште (*)

Број мобилног телефона (навести број у формату 06X... без размака и цртица) (*)

Број фиксног телефона (навести број у формату нпр. 011... без размака и цртица):

Одаберите локацију где желите да примите вакцину (*)

Изаберите општину

Исказујем интересовање да примим било који тип вакцине за који Агенција за лекове и медицинска средства потврди безбедност, ефикасност и квалитет и изда дозволу за употребу лека.

Исказујем интересовање да примим искључиво вакцину одређених произвођача за који Агенција за лекове и медицинска средства потврди безбедност, ефикасност и квалитет и изда дозволу за употребу лека.

Да ли имате неко од специфичних обољења?

Не

Да

Да ли због здравствених проблема не можете да излазите из куће/стана?

Не, немам таквих здравствених проблема

Да, не могу да излазим из куће/стана

Да ли сте добровољни давалац крви?

Не

Да

* Приликом доласка у заказан термин вакцинације потребно је да донесете доказ да сте добровољни давалац крви.

Да ли можете доћи у било којем термину који закаже еУправа?

Могу доћи у било ком термину који закаже еУправа

Могу доћи само у термину који је после назначеног датума

Нисам робот

Сагласан сам да овлашћено лице Института за јавно здравље Србије "Др Милан Јовановић Батут" обради наведене податке у вези са вакцинацијом против COVID-19 и предложи термин и место вакцинације.

Обавезна поља су означена звездом (*)

Одустани **Поднеси захтев**

euprava.gov.rs
Портал еУправа Републике Србије

Веб презентација је лиценцирана под условима лиценце Creative Commons Ауторство-Некомерцијално-Без прераде 3.0 Србија. Веб пројекат ite.gov.rs
Услови коришћења

Слика 3.42. Упитник за исказивање интересовања за вакцинасиње против COVID-19 на Порталу еУправа

Уколико неко од грађана није био у могућности да попуни упитник, то је за њих могао да уради ближи члан породице, при чему је требало да се наведу подаци о лицу за које се попуњава упитник и да се остави контакт особе за коју се врши пријава. У случају да лице за које се попуњава упитник не поседује мобилни уређај или електронску пошту, онда је било потребно навести контакт особе која попуњава упитник. Попуњавањем овог упитника исказује се интересовање грађана за примање вакцине против пандемије COVID-19. Избором дугмета *Поднеси захтев* (Слика 3.43) подаци грађана се преко Портала еУправа шаљу систему *еЗаказивање*.

Нисам робот

Сагласан сам да овлашћено лице Института за јавно здравље Србије "Др Милан Јовановић Баћуш" обради наведене податке у вези са вакцинацијом против COVID-19 и предложи термин и место вакцинације.

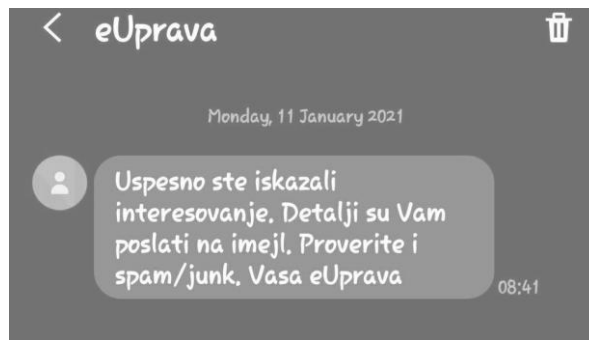
Одустани **Поднеси захтев**

euprava.gov.rs
Портал еУправа Републике Србије

Веб презентација је лиценцирана под условима лиценце Creative Commons Ауторство-Некомерцијално-Без прераде 3.0 Србија. Веб пројекат ite.gov.rs
Услови коришћења

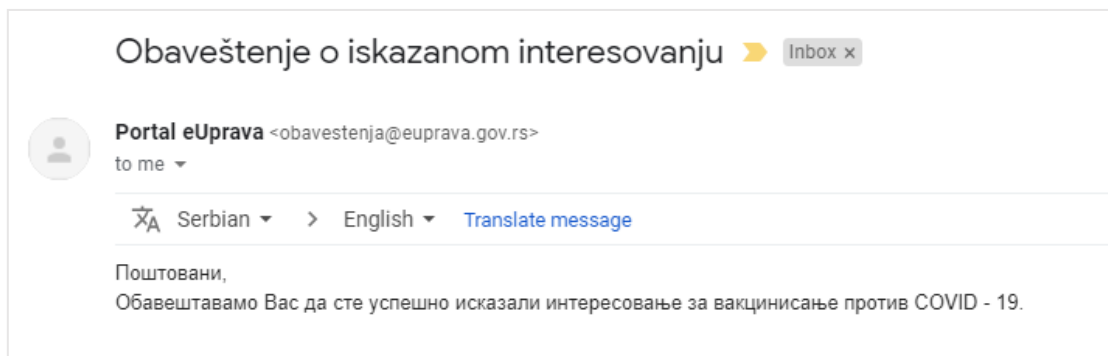
Слика 3.43. Последњи корак у исказивању интересовања за вакцинасиње против COVID-19 преко Портала еУправа

Након исказаног интересовања (Слика 3.44), свако лице је добијало електронску пошту или СМС поруку о термину и месту имунизације, а у складу са донетим приоритетом имунизације. У поруци коју је сервис еУправе слао грађанима налазили су се подаци о месту, времену и датуму вакцинације са јединственим матичним бројем грађана за одређено лице. Треба истаћи да се овим упитником искључиво исказивало интересовање за вакцинасињем, а никако се није давала сагласност за саму вакцинацију.



Слика 3.44. СМС порука која аутоматски долази након исказивања интересовања грађана за вакцинасиње против COVID-19 на Порталу еУправа

Документ који представља сагласност за вакцинацију било је потребно потписати код лекара и то на пункту у случају да су се грађани одлучили да се вакцинишу. У сваком тренутку исказано интересовање могло је да се промени или обрише. После вакцинације свако лице добија и одштампану потврду о извршеној вакцинацији против корона вируса SARS-CoV-2 (Слика 3.45).



Слика 3.45. Обавештење о исказаном интересовању послато на имејл корисника.

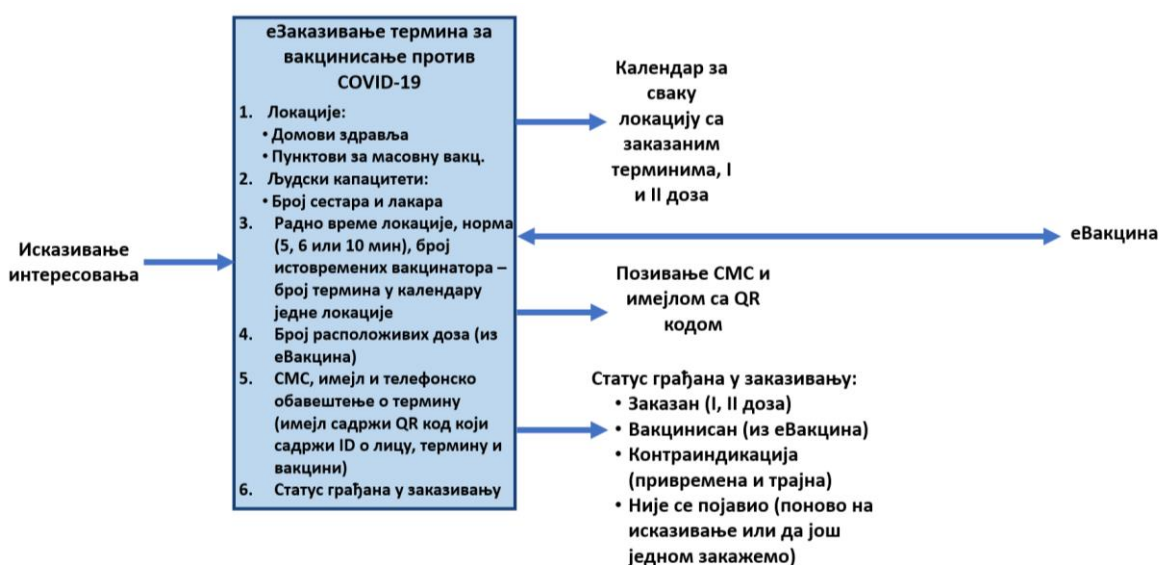
Најефикаснији начин пријаве за заинтересоване грађане јесте управо преко Портала еУправа, али постоји и већи број људи нарочито старијих грађана који пријављивање и даље врше путем телефона. У том случају, приликом исказивања интересовања путем контакт центра 0800-222-334 неопходно је да се оставе лични подаци грађана као што су јединствени број грађана, име и презиме. Том приликом од грађана се није захтевала електронска пошта, сматрајући да су та лица мање информатички обучена.

У разговору са дежурним оператерима било је неопходно оставити податак о жељеном месту или општини за вакцинацију, као и информацију о постојању неке од хроничних болести код грађана. Пријава путем контакт центра могла је да се обрише или одбаци с обзиром да вакцинација није била обавезна за све грађане. Такође, уколико је неко лице било позвано на вакцинацију, није било у обавези да вакцинацију обави. Ипак треба истаћи да је сама пријава представљала добро координисану активност током процеса

вакцинације, што је представљало добру логистичку подршку за следећу фазу тј. масовну вакцинацију.

3.4 ПОДСИСТЕМ ЗА ЗАКАЗИВАЊЕ ТЕРМИНА ЗА ВАКЦИНИСАЊЕ ПРОТИВ COVID-19

Централни део Информационог система као подршка имунизацији против COVID-19 представља подсистем за заказивање термина за вакцинисање. На основу броја локација у Србији (домови здравља и пунктови за масовну вакцинацију), на основу људских капацитета који раде на овим локацијама (број лекара, медицинских сестара и волонтера). као и њиховој норми за вакцинацију, на основу расположивих вакцина и исказаних интересовања грађана, врши се централизовано заказивање термина.



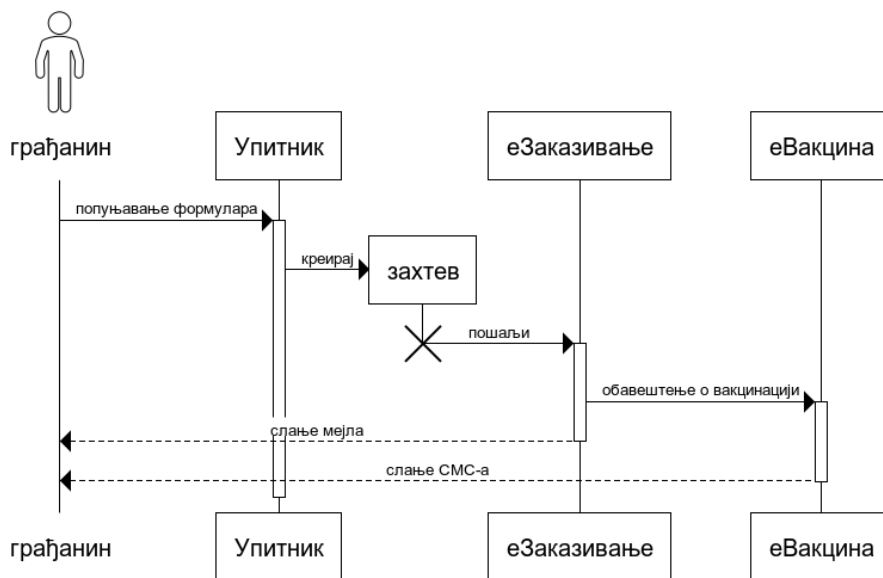
Слика 3.46. Модел података/информација у подсистему за заказивање термина за вакцинисање против COVID-19

За сваку локацију дефинише се дневни календар са заказаним терминима, док се грађани позивају слањем СМС и имејл порука. Приликом слања имејл поруке одмах се шаље и предефинисана персонализована сагласност за спровођење препоручене имунизације која садржи и QR код. Модел овог подсистема дат је на Слици 3.46. Као улазни подаци у овом подсистему користе се подаци из подсистема за исказивање интересовања на основу којих се утврђује тачан број могућих вакцинација грађана на одређеној локацији и датом термину. Излазни подаци овог подсистема су свакако:

- календар са означеним термином и локацијом за прву или другу дозу;
- информације које се шаљу грађанима преко аутоматских порука путем имејла са QR кодом или СМС порука;

- статус грађана у заказивању који обухвата следеће информације: да ли је грађанину заказан термин за прву или другу дозу, да ли је грађанин вакцинисан првом или другом дозом, да ли је било контра индикација, па грађанин није вакцинисан, да ли се грађанин није појавио и да ли га треба поново позвати.

Процес подсистема за заказивање термина за вакцинисање против COVID-19, односно секвенцијални дијаграм тока начина функционисања и рада веб странице *еЗаказивање*, приказан је на Слици 3.47.

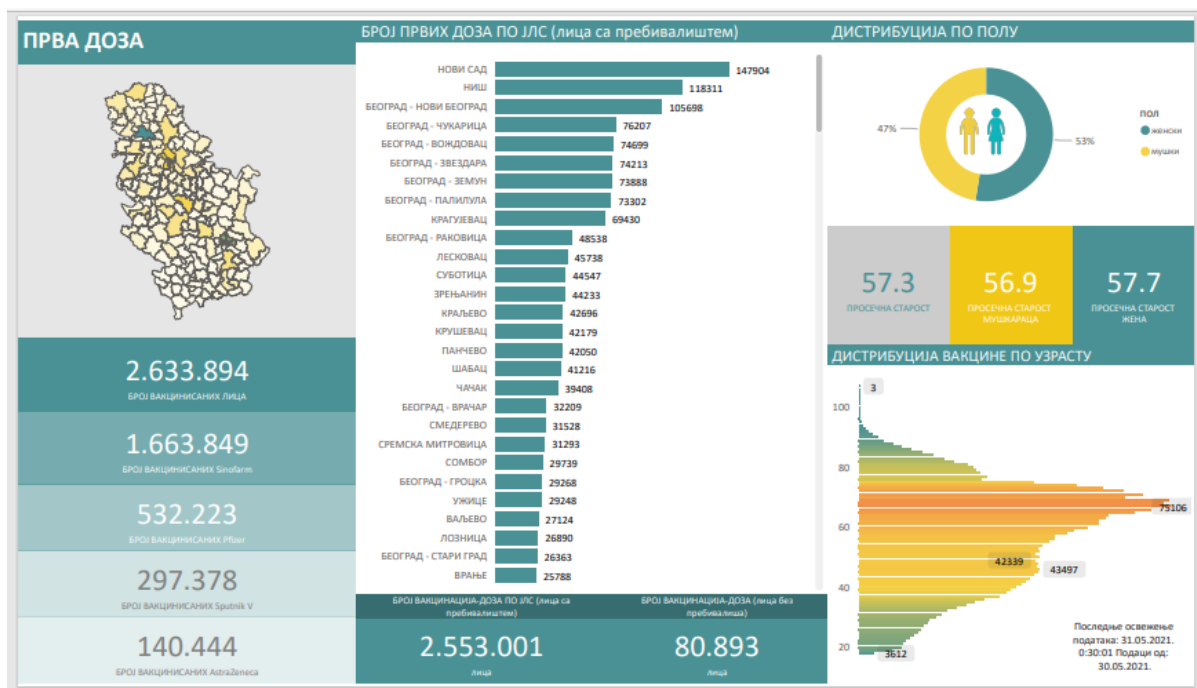


Слика 3.47. Секвенцијални дијаграм тока захтева кроз *еЗаказивање*.

Захваљујући Информационом систему као подршка имунизацији против COVID-19, у реалном времену се генеришу веома битни извештаји који помажу у управљању процесом вакцинације у Србији (Слика 3.48). Извештај садржи податке о броју грађана пријављених за вакцинацију, броја дистрибуираних вакцина широм Србије, као и број вакцинисаних грађана по општинама и градовима (по типу вакцине, по полу и по узрасту). На основу ових извештаја, као и самих података о вакцинацији, може се пратити динамика, као и социјална и старосна структура вакцинисаних грађана² као што је приказано на Слици 3.49.

Ипак, на основу података са Портала еУправа могу се детаљније приказати и изложити неки важнији статистички показатељи, односно динамика имунизације грађана Републике Србије. Основни статистички показатељи броја вакцинисаног становништва, у периоду од 24. децембра 2020. године (када званично почиње вакцинација у Републици Србији), па до 6. јуна 2022. године дат је у Табели 3.3

² Детаљнија динамичка анализа броја вакцинисаних грађана, са аспекта моделовања стохастичким процесима, односно временским серијама, биће изложена у шестом поглављу ове дисертације под називом «Студије случаја – експериментална истраживања».



Слика 3.48. Пример извештаја из Информационог система као подршка имунизацији против COVID-19 (Извор: еУправа Републике Србије)



Слика 3.49. Извештај о броју вакцинисаних по узрасту у Информационом систему као подршка имунизацији против COVID-19 (приказан је узраст од 46 до 55 година старости) (Извор: еУправа Републике Србије)

. Из табеле можемо уочити да се просечан број вакцинисаних лица не разликује значајно у односу на то да ли је вакцинација извршена првом, другом или трећом дозом вакцине. Слично, укупан број особа које су имунизоване првом дозом је тек незнатно већи од броја особа имунизованих другом дозом (у оба случаја, са више од три милиона вакцинисаних). С друге стране, број лица која су примила трећу („бустер“) дозу је скоро

двоструко мањи и износи приближно 1,9 милиона становника. Приметимо да готово исти овакав однос има и број дана када је вршена имунизација одговарајућом дозом вакцине.

Табела 3.3. Статистички показатељи броја вакцинисаних лица (период 24.12.2020 - 06.06.2022.)

Статистика	Прва доза	Друга доза	Трећа доза
Просек	6.348,00	6.415,26	6.274,65
Медијана	2963	3026,5	2549
Станд. девијација	10.232,35	10.076,39	7.440,05
Минимум	4	1	1
Максимум	68.678	65.245	28.683
Укупно	3.351.746	3.271.784	1.888.671
Број дана	529	510	301

Најзад, на Слици 3.50 приказана је динамика вакцинације првом, другом и трећом дозом вакцине по месецима у току 2021. године. Овде се, рецимо, може уочити да је највећи број лица првом дозом вакцинисан у априлу, а другом дозом у мају 2021. године. С друге стране, највећи број лица вакцинисаних трећом дозом био је у новембру исте те године.



Слика 3.50. Поларни дијаграм броја вакцинисаног становништва по месецима (Извор: ауторова илустрација на основу података еУправе Републике Србије)

4 МАТЕМАТИЧКО-СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ

У овом поглављу биће дат кратак преглед основних појмова и термина који се користе у тзв. *математичко-стохастичком моделовању реалних података* као основних извора информација. Најпре ће бити изложени основни принципи математичко-стохастичког моделовања, као и најважнији појмови *теорије вероватноћа и статистике*, двеју математичких дисциплина које дају основ оваквом начину моделовања реалних појава. Затим ће, као посебно важни, бити изложени тзв. *динамички модели*, тј. елементи *теорије случајних процеса*, као типични стохастички модели реалних појава које протичу у времену³.

4.1 ПОЈАМ МОДЕЛА, СИМУЛАЦИЈА И МОДЕЛОВАЊА

Сам корен речи *модел* настао је од латинске речи *modulus*, која у преводу значи: мера, начин, слика или изглед. Речи модел и моделирање све су чешће данас у употреби, посебно у науци, али и у обичном животу. У неким случајевима смисао ових речи је сасвим јасан. Рецимо, када говоримо о моделу аутомобила, макети неке зграде, фото-моделу, моделу обуће и одеће, потпуно је јасно о каквом је моделу реч. У процесу производње израђују се модели неких производа који касније улазе у програм производње, на пример, прототип аутомобила и слично.

Дакле, реч модел у свакодневном животу има разна значења. Међутим, овде ће првенствено бити од интереса значење те речи у науци, а посебно у анализи разних специфичних процеса и делатности којима се бави Управа Републике Србије. Стога ћемо се овде бавити различитим математичко-стохастичким моделима, који немају баш потпуно исто значење као у осталим наукама, а о чему ће сада бити више речи.

4.1.1 Моделовање и симулација

У природним наукама под *моделом у ширем смислу* подразумева се мисаоно (или практично) створена структура којом се представља неки део идеализоване, често упрошћене реалности. Модел, као елемент научне слике света, по правилу представља неку упрошћену идеализацију реалности, при чему су степен и карактер поједностављења током времена веома променљиви. На пример, прве представе о атомима као најситнијим честицама материје били су модели малених лопти, чије је кретање хаотично. Данас се у ту

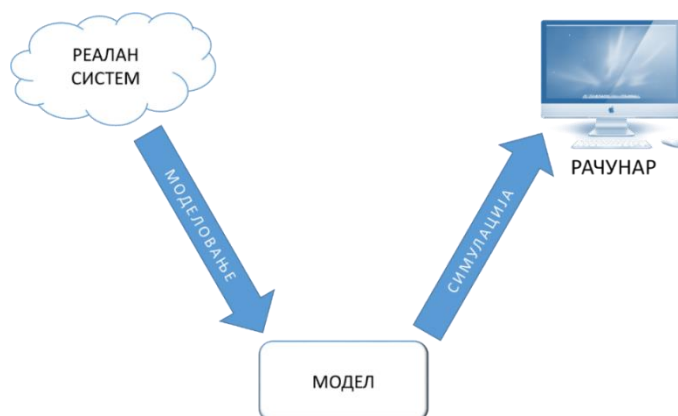
³ У наредном поглављу ће бити описани још неки модели, посебно тзв. *регресиони модели* који се користе у описивању међузависности (корелације) различитих појава.

сврху користи тзв. Радерфордов модел, где се посебним, додатним, сложенијим моделом описује и унутрашња структура атома. Дакле, у природним наукама често се користе тзв. помоћни објекти за разна истраживања, при чему тада полазни објекти јесу *оригинали*, а помоћни објекти њихови *модели*.

Проучавање разних појава или процеса посредним путем, помоћу модела, назива се *моделовање*. Под моделовањем, у најопштијем смислу, подразумева се испитивање неких појава, објеката или процеса на сасвим посредан начин, тј. помоћу одговарајућих модела. Из тог разлога моделовање представља један од најефикаснијих начина изучавања одређених процеса и појава, па је самим тим коришћење модела итекако распрострањено у савременој науци. Само моделовање се примењује у готово свим наукама, тј. може се сматрати да оно представља генератор развоја тих наука, па и саме математике, с обзиром на све већу математизацију разних области науке.

С друге стране, једна од важнијих интерпретација модела и моделовања, са информатичког становишта, јесте могућност *софтверске интерпретације модела*, тј. могућност њихове имплементације на рачунару. На овај начин знатно је олакшан поступак постављања проблема и његово решавање, јер је тада могуће применити одговарајући алгоритам и решити проблем применом софтвера. Тиме се такође отвара пут увођењу тзв. *поступака симулације* одређеног проблема, односно његовог решења.

Према појединим ауторима, моделовање и симулацију чини „низ активности за прављење модела реалног система и његову симулацију на рачунару“ (Zeigler, Praehofer, & Kim, 2000). Притом, као што је већ раније речено, моделовање јесте процес успоставља везе између реалног система и модела, док симулација представља процес успостављања везе између модела и рачунара (Слика 4.1).



Слика 4.1. Релациони однос између реалног система, модела и његове симулације на рачунару

Тако долази до стварања тзв. *симулационог модела*, тј. рачунарског програма за генерисање понашања одговарајућег реалног система. Ови модели су веома погодни, између осталог, за генерисање посебних динамичких модела, тзв. временских серија,

односно вредности променљивих одговарајућег симулираног система. Управо из тих разлога такви симулациони модели биће коришћени у овом раду, пре свега за описивање динамике имунизације становништва у борби против болести COVID-19.

На крају овог одељка истакнимо да *симулација у најширем смислу* обухвата читав низ научноистраживачких активности. То су, између осталог:

- експериментисање на реалном систему;
- снимање података из реалног система;
- формулисање одговарајућих теорија;
- изградња концепцијског модела;
- програмирање и планирање експеримената на рачунару;
- експериментисање програмом на рачунару и анализа добијених резултата (симулација у ужем смислу).

4.1.2 Математички модели

Треба истаћи да је огроман број модела, како теоријских, тако и симулационих, настао на основу погодних *математичких модела*. Уопштено речено, *математичко моделовање* неког процеса или појаве јесте апстрактно-мисаони процес, односно систем чије је проучавање могуће спровести одговарајућим математичким методама. Најчешће је реч о врло сложеним процесима на које делује мноштво разних фактора, основна идеја јесте да се конструишу адекватни математички модели. При томе се издвајају само они фактори који су од посебне важности, док се остали фактори, који нису од значаја за функционисање самог процеса, могу оставити „по страни“. Као резултат таквих поједностављења добија се идеализован, реално непостојећи систем, који ипак садржи и правилно описује основне карактеристике и законитости моделованог система. Тако се добија *математички модел реалног система*, који се даље изучава одговарајућим математичким методама и то у суштини представља основни принцип математичког моделовања реалне слике света.

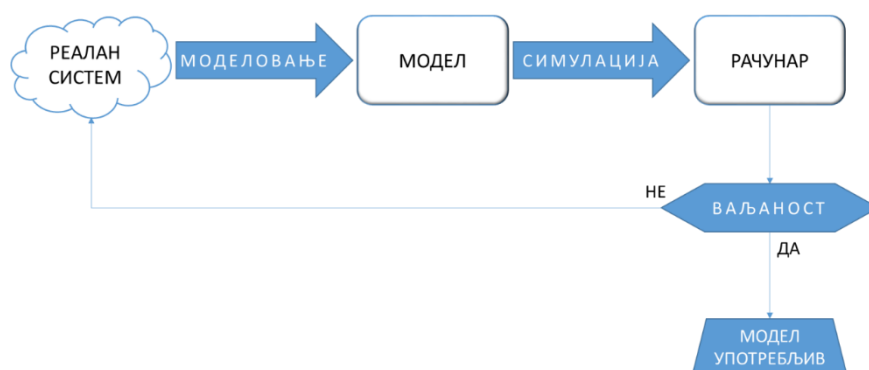
Посебна предност математичких модела јесте да омогућавају *аналитичко (егзактно)* или пак *приближно (апроксимативно) решавање* одређеног проблема. Притом ови модели, између осталог, имају следеће, само себи својствене особине:

- користе различите формално-дедуктивне поступке математичке логике и математичке анализе;
- могу дати општа решења проблема у облику одговарајућих формула;
- ваљани су и тачни за различите вредности улазних величина и параметара;
- могу се користити увек када је неки проблем могуће моделовати датим математичким моделом.

На овај начин математички модели најчешће обезбеђују већу прецизност и потпуност у описивању датог реалног система. Такође, такав модел описује систем на јасан и недвосмислен начин, при чему се користе унапред познате методологије, тј. конвенционални, математичко-формални приступ и правила у његовој изградњи. Ипак, да би сам модел био прихватљив, тј. адекватан реалном систему који описује, неопходна је његова *верификација и провера ваљаности*. То значи да се проверава степен подударарања модела са реалним системом, при чему је, наравно, апсолутно подударарење немогуће. Ипак, разлике које настају морају бити само последица одговарајућих апроксимација параметара модела у односу на реални систем.

Посебно је важно истаћи да се приликом утврђивања ваљаности математичких модела могу разликовати различити степени (нивои) њихових ваљаности (Anderson & Vastag, 2004):

- *репликативна ваљаност* представља најнижи степен ваљаности модела, тада се пореде само излазне вредности модела и њему одговарајућег система;
- *предикативна ваљаност* указује на то да модел производи добре вредности на излазима, чак пре него што се ове вредности могу утврдити у реалном систему. Овакав модел је од посебног значаја, јер омогућава истраживање ситуација које нису посматране у самом систему;
- *структурна ваљаност модела* значи да он у потпуности описује начин на који реалан систем функционише, тј. такав модел омогућава истраживање операција и веза унутар система које се не могу мерити у реалном окружењу.



Слика 4.2. Изградња и провера ваљаности математичког модела

Рецимо још и то да је рачунарска симулација, посебно са савременог становишта, итекако важна у математичком моделовању. Помоћу одговарајућих рачунарских програма одређује се понашање модела на основу различитих улазних вредности (односно скупа улазних променљивих), чиме се омогућава и изградња апстрактног, ваљаног математичког модела. Штавише, рачунар се употребљава пре свега у циљу формирања и даљег развоја

модела, али и за извршавање сложених нумеричких прорачуна који се могу обављати на основу претходно формираног модела. Целокупан поступак приликом формирања, симулације и провере ваљаности математичких модела може се приказати алгоритамски као на Слици 4.2.

4.1.3 Детерминистички и стохастички модели

Математички модели могу се класификовати у две основне групе, тј. могу се посматрати као *детерминистички и стохастички модели*. Детерминистички модел јесте онај математички модел у коме информације о понашању система у неком временском интервалу омогућавају тачну прогнозу о понашању система и изван тог временског интервала. У таквим моделима параметри који описују поједина стања система као и његово понашање потпуно су одређени и непроменљиви. Примена детерминистичких модела у науци започела је веома давно. Рецимо, чувени Њутнови закони механике, који су објављени још давне 1666. године, јесу типичан пример детерминистичких модела. Када је реч о ефективној примени детерминистичких математичких модела реалних процеса или појава, морају се пре свега дефинисати непознате величине које треба одредити, као и везе које међу њима постоје. У пракси, везе између непознатих величина обично се изражавају у облику (диференцијалних) једначина, неједначина, односно тзв. почетних услова (уколико постоје).

Сасвим је другачија ситуација када се ради о процесима који су *случајног карактера*. У том случају није могуће предвидети понашање система изван датог временског интервала у коме се тај систем посматра. Другим речима, прелаз система из једног стања у друго може се предвидети само у терминима вероватноћа, па се зато овакви математички модели називају *стохастички модели*. Стохастички модели се јављају у случајевима када је у процесу анализе оригинала неопходно узети у обзир и неке случајне параметре, при чему настају потешкоће јер се појављују непознати закони расподеле вероватноћа, као и неке карактеристике протицања процеса у времену које имају статистички карактер, као што су средња вредност, дисперзија, коваријанса итд. Проблем поузданости, оцене расподеле или нумеричких карактеристика расподеле таквих процеса решава се избором одређеног броја полазних података за параметре које пратимо. Дакле, у случају стохастичких модела ради се са скуповима података могућих вредности, па је из тих разлога и обим рачунских операција које треба извести знатно већи и комплекснији него код детерминистичких модела.

Примена стохастичких модела је релативно скоро (тек последњих деценија) ушла у поједине научне области истраживања, али су зато постали веома моћно средство у

проучавању и најсложенијих ситуација у разним областима науке. Код готово свих модела, а посебно код оних стохастичких, поставља се као кључно питање да ли се одговарајући модел мења временом. Уколико структура модела, тј. интеракција његових елемената зависи од времена, онда кажемо да реч о *временски променљивом моделу* (у супротном, реч је о *временски непроменљивом*, тј. *инваријантном моделу*.) Код динамичких модела, тј. временски зависних, скуп вредности које узима „временска променљива“ (t) може бити пребројив (дискретан), односно небројив (непрекидан). Из тих разлога динамички модели се обично деле на две посебне групе:

- i. *модели са дискретним стањима*, где улазне променљиве узимају вредности скупова чији су елементи дискретних (пребројивих) вредности.
- ii. *модели са континуалним (непрекидним) стањима*, где улазне променљиве узимају вредности унутар неког небројивог скупа, тј. интервала у скупу реалних бројева, што су *редови чекања* и *временске серије*, који представљају стохастичке моделе који протичу у времену.

Још једна важна подела динамичких модела јесте на *линеарне* и *нелинеарне моделе*. Линеарни модели (\mathcal{L}) приликом промене стања дају излазне вредности за које важи тзв. *принцип линеарности*. Ако са c_1, c_2 означимо произвољне бројевне вредности (константе), а са $u_1(t), u_2(t)$ улазне вредности (променљиве) линеарног модела \mathcal{L} , принцип линеарности можемо математички записати у облику једнакости:

$$\mathcal{L}(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)) = \mathcal{L}(c_1 u_1(t)) + \mathcal{L}(c_2 u_2(t)).$$

Због своје аналитичке једноставности линеарни динамички модели су погодни за описивање реалних појава. Наравно, јасно је да претпоставка о линеарности одговарајућег модела није увек оправдана. Стога ће у наставку бити речи и о *нелинеарним стохастичко-динамичким моделима*. Као посебно важна биће описана нова, оригинална модификација једне од класа тзв. *уопштених STOPBREAK модела*⁴, која ће бити практично примењена у описивању динамике и дистрибуције фреквенција броја вакцинисаних лица у Србији против болести COVID-19. На тај начин, као што ћемо видети у наредном поглављу, овај и још неки од горе наведених стохастичких модела се могу користити управо у стохастичкој анализи динамике и степена ефикасности вакцинације унутар система еУправе Републике Србије.

⁴ Потпун назив ових модела гласи „стохастички модели трајног прекида“. Горе наведена скраћеница настала је на основу оригиналног енглеског назива: *STOchastic Permanent BREAKing models*.

4.2 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

Теорија вероватноће се бави проучавањем законитости које одликују случајне појаве, тј. појаве које се не могу са сигурношћу предвидети. То су, на пример, извлачење добитака игара на срећу, кретање температуре ваздуха, промена цена робе и услуга итд. Са историјског становишта, основни извор теорије вероватноће јесу игре на срећу. Ипак, она данас представља важну област савремене науке која налази огромне примене у многим областима науке и живота уопште. Посебно је значајна њена примена у другим научним дисциплинама, где представља теоретску основу за математичко моделовање процеса који имају случајан карактер и не могу се описати уобичајеним методама. Таквих појава има у великом броју, тако да постоје многе посебне научне гране, пре свих математичка (теоријска) статистика, које се бави директном применом основних резултата теорије вероватноће у статистици. Законитости које се овде јављају другачијег су карактера од оних на које смо навикли, па је неопходно дефинисати неке од основних појмова које ћемо користити у даљем раду.

Дефиниција 4.2.1. *Статистички (случајни) експеримент* јесте експеримент у коме се, независно од услова извођења, јављају случајно различите реализације (исходи). Те реализације називају се *елементарни исходи* или *елементарни догађаји*. Њихова укупност представља простор елементарних догађаја који ћемо означити:

$$\Omega = \{ \omega \mid \omega \text{ је елементаран догађај} \}. \blacksquare$$

Поред елементарних, можемо дефинисати и тзв. *сложене случајне догађаје*, као догађаје који се састоје из већег броја елементарних исхода. Случајне догађаје, као и скупове, обележавамо словима A, B, C, \dots , мада их можемо дефинисати и на други начин, рецимо, исказом. Са догађајима, слично као и са скуповима, могу се дефинисати уобичајене основне скуповне операције⁵. Све догађаје из простора Ω (како елементарне, тако и сложене) можемо посматрати као елементе сложенијег скупа, који сада описујемо.

Дефиниција 4.2.2. Сви догађаји простора Ω припадају скупу \mathcal{F} са особинама:

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
- (iii) $(\forall n \in \mathbb{N}) (A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

⁵ Више детаља о овом појму као и још неким основним појмовима теорије вероватноћа може се наћи, рецимо, у (Стојановић, В., 2012), односно (Јоксимовић & Стојановић, 2019).

Скуп \mathcal{F} представља *поље догађаја*, дефинисано над простором елементарних исхода, а уређен пар (Ω, \mathcal{F}) назива се *простор догађаја*. ■

Пример 4.2.1. Нека је простор елементарних исхода скуп реалних бројева, тј. $\Omega = \mathbb{R}$. Означимо са \mathcal{B} фамилију свих подскупова скупа \mathbb{R} који представљају пребројиве уније или пресеке отворених интервала облика $(a, b) \subset \mathbb{R}$, где је $a < b$. За скуп \mathcal{B} показује се, такође, да представља поље догађаја које називамо *Бореловим пољем*, а његове елементе *Бореловим скуповима (догађајима)*. У ове скупове спадају сви отворени скупови у \mathbb{R} , јер они представљају пребројиве уније отворених интервала, али и затворени скупови у \mathbb{R} , као компленти отворених скупова. Најзад, сваки једноелементни скуп $\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$, јесте Борелов скуп, јер важи:

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right).$$

Одавде следи да у Борелове скупове спадају и сви полузатворени интервали $[a, b) \subset \mathbb{R}$, јер је $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$, као и затворени интервали итд. ■

Дефинисање простора елементарних исхода представља само први корак у конструисању модела који ће описивати карактер случајности појава и процеса који се посматрају. Природно, након дефиниције самог догађаја долазимо до потребе за увођењем *појма вероватноће* са којом се ови догађаји реализују. Данас је општеприхваћена *аксиоматска дефиниција вероватноће* славног руског математичара Андреја Колмогорова, кога сматрамо творцем савремене теорије вероватноће.

Дефиниција 4.2.3. Вероватноћа јесте функција $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ са особинама:

(i) *Ненегативност:* $P(A) \geq 0$;

(ii) *Нормираност:* $P(\Omega) = 1$;

(iii) *Адитивност:* За сваки низ дисјунктних догађаја (A_n) важи:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Вероватноћа $P(\cdot)$ је, дакле, *нормирана функција (нормирана мера)* која сваком догађају A придружује број $P(\cdot) \in [0,1]$, тј. вредност која представља *вероватноћу његове реализације*. Сама аксиоматска дефиниција омогућава доказивање још неких важних особина вероватноће. Тако, рецимо, за произвољне догађаје A и B показује се да важи:

- (a) $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- (b) $P(\emptyset) = 0$;
- (c) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cdot B)$;
- (d) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
- (e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

4.3 ТЕОРИЈСКЕ РАСПОДЕЛЕ ДИСТРИБУЦИЈЕ ФРЕКВЕНЦИЈА

Простор елементарних исхода често је непогодан за прецизно описивање. У ту сврху уводе се *случајне променљиве*, које елементарне исходе приказују реалним бројевима. У овом делу биће најпре формално дат појам случајне променљиве, а затим описане неке од важнијих типова случајних променљивих, односно тзв. *теоријских распореда дистрибуције фреквенција* који ће бити коришћени у даљем раду.

Дефиниција 4.3.1. Нека је (Ω, \mathcal{F}) простор догађаја. *Случајна променљива* јесте функција $X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да за сваки Борелов скуп $S \subset \mathbb{R}$ важи:

$$X^{-1}(S) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\} \in \mathcal{F}.$$

У слободној интерпретацији, случајна променљива јесте пресликавање X које сваком елементарном исходу $\omega \in \Omega$ придружује нумеричку вредност $X(\omega) \in \mathbb{R}$. Притом, функција X додатно поседује и *особину мерљивости* која је описана у горе наведеној дефиницији. Њоме се „захтева“ да инверзне слике свих мерљивих скупова у \mathbb{R} при пресликавању X буду случајни догађаји, тј. елементи поља догађаја \mathcal{F} .

Овако свака случајна променљива трансформише апстрактан простор догађаја (Ω, \mathcal{F}) у тзв. *реалан мерљив простор* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Рад у фазном простору вероватноћа који смо дефинисали у претходном делу, такође, може бити веома компликован. Ипак, приметимо да, на основу Дефиниције 4.3.1, свака случајна променљива X својим инверзним пресликавањем X^{-1} трансформише бесконачне интервале облика $(-\infty, x)$ $x \in \mathbb{R}$ у догађаје простора (Ω, \mathcal{F}) . С обзиром на то можемо дефинисати још једно важно пресликавање које доста поједностављује рад са догађајима, вероватноћама и случајним променљивама.

Дефиниција 4.3.2. Нека је $X: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ случајна променљива. Функција $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$F_X(x) = P(X^{-1}(-\infty, x)) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}, x \in \mathbb{R}$$

назива се *функција расподеле* (случајне променљиве X). ■

Дакле, функција расподеле представља реалну функцију која сваком реалном броју $x \in \mathbb{R}$ придружује вероватноћу догађаја $X^{-1}(-\infty, x)$. Притом важи:

Теорема 4.3.1. Функција расподеле F_X и расподела P_X се узајамно једнозначно одређују.

Доказ. Ако је дата расподела P_X , онда се функција расподеле F_X одређује на раније описан начин. С друге стране, ако претпоставимо да је дата функција F_X , одговарајућу расподелу можемо одредити најпре на скуповима облика $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$P_X([a, b)) = F_X(b) - F_X(a).$$

Расподела P_X се тада једнозначно одређује на целом простору тзв. Борелових мерљивих скупова \mathcal{B} унутар скупа реалних бројева \mathbb{R} . ■

4.3.1 Основни параметри расподеле

Познавање расподеле случајне променљиве омогућава, са стохастичког становишта, њено потпуно упознавање. Међутим, у великом броју случајева практичне примене случајних променљивих није могуће (или пак није потребно) поседовати потпуну информацију о њиховој расподели. Случајна променљива се у том случају описује на основу одређених параметара који пружају додатне информације о случајној променљивој, односно њеној расподели. Овде у кратким цртама описујемо неке од важнијих параметара расподеле случајних променљивих.

4.3.1.1 Математичко очекивање (средња вредност)

Математичко очекивање (средња вредност) случајне променљиве X у ознаци $E(X)$ представља, слободно речено, њену просечну вредност приликом низа узастопних реализација. Како све вредности случајна променљива X узима са одређеном вероватноћом, то се приликом израчунавања њене средње вредности мора и о њима водити рачуна. Зато излажемо поступак налажења математичког очекивања најпре за просте случајне променљиве, за које је расподела одређена дводимензионалним низом:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

где је $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Математичко очекивање ове случајне променљиве тада гласи:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k, \quad (4.1)$$

тј. представља збир производа вредности x_k које узима случајна променљива X и одговарајућих вероватноћа p_k .

На сличан начин одређује се и математичко очекивање елементарне случајне променљиве. Ако је:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix},$$

где је $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, онда је:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \quad (4.2)$$

Претпоставимо, најзад, да је X случајна променљива непрекидног типа. У том случају се њено математичко очекивање дефинише у облику тзв. *Лебеговог интеграла*:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dF_X. \quad (4.3)$$

Смисао оваквог начина дефинисања јесте у томе што он садржи и претходне дефиниције за $E(X)$, у случајевима елементарних случајних променљивих, тј. задате једнакостима (4.1) и (4.2). Најзад, ако је случајна променљива X апсолутно-непрекидног типа, са функцијом густине $f(x)$, онда на основу једнакости (4.3) закључујемо да је њено математичко очекивање одређено Римановим интегралом:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (4.4)$$

На крају, наводимо нека од основних својстава математичког очекивања која произилазе из познатих својстава интеграла:

- $|E(X)| \leq E|X|$;
- $E(aX) = aE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$;
- $X \geq Y \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$;
- Ако су X, Y независне случајне променљиве, онда је $E(XY) = E(X)E(Y)$.

4.3.1.2 Дисперзија (варијанса)

Познавање математичког очекивања само је први корак у налажењу параметара одређене расподеле. Следећи важан параметар је *дисперзија (варијанса)*, која представља меру одступања одређене расподеле од њене средње вредности. Стога најпре дефинишимо момент реда $k \in \mathbb{N}$ као математичко очекивање $E(X^k)$ случајне променљиве X^k . Аналогно „обичном“ моменту k -тог реда могу се дефинисати:

(i) $E|X|^k$ – апсолутни момент реда k ;

(ii) $E[X - E(X)]^k$ – централни момент реда k .

Дефинишимо сада, на формалан начин, појам дисперзије.

Дефиниција 4.3.2. Нека је X произвољна случајна променљива. Централни момент другог реда назива се *дисперзија (варијанса)* случајне променљиве X у ознаци:

$$D(X) = E[X - E(X)]^2.$$

На основу претходне дефиниције и особине математичког очекивања дисперзија случајне променљиве X може се приказати формулом:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \quad (4.5)$$

Ова формула је погоднија за практично израчунавање јер захтева познавање „обичних“ момената $E(X)$ и $E(X^2)$. Иначе, дисперзија представља тзв. квадрирани степен одступања X од њене средње вредности, па се често посматра њен квадратни корен:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

који се назива *стандардна девијација* случајне променљиве X .

У наредним тврђењима, чији се детаљан доказ може наћи код аутора (Јоксимовић & Стојановић, 2019), наводимо још неке од особина дисперзије.

Теорема 4.3.2. Нека је X произвољна случајна променљива са коначном дисперзијом $D(X) < +\infty$ и $a \in \mathbb{R}$ произвољан број. Тада важи:

1. $D(X) \geq 0$, при чему је $D(X) = 0$ акко је $X = a$;
2. $D(aX) = a^2 D(X)$;
3. $D(X + a) = D(X)$;
4. Функција $f(a) = E(X - a)^2$ достиже свој минимум $D(X)$ за $a = E(X)$.

Теорема 4.3.3. За произвољан низ независних случајних променљивих X_1, X_2, \dots, X_n важи *једнакост Бијенамеа*:

$$D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n). \quad (4.6)$$

Теорема 4.3.4. За сваку случајну променљиву X и произвољан број $\varepsilon > 0$ важи *неједнакост Чебисева*:

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \quad (4.7)$$

4.3.1.3 Коваријанса и корелација

Коваријанса се дефинише као „мера повезаности“ двеју случајних променљивих X и Y . По дефиницији, коваријанса је одређена изразом:

$$\text{Cov}(X, Y) = E [X - E(X)] [Y - E(Y)],$$

односно $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, где се, поред математичког очекивања за X и Y , јавља и њихов тзв. *узајамни (мешовити) момент* $E(XY)$. На сличан начин као код дисперзије (Теорема 4.3.2.) показују се одређене особине коваријансе.

Теорема 4.3.5. Нека су X, Y случајне променљиве и $a, b \in \mathbb{R}$. Тада важи:

$$(i) \text{Cov}(Y, X) = \text{Cov}(X, Y);$$

$$(ii) \text{Cov}(X, X) = D(X);$$

$$(iii) \text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y);$$

$$(iv) \text{Cov}(X + a, Y + b) = \text{Cov}(X, Y);$$

(v) Ако су X, Y независне случајне променљиве, онда је $\text{Cov}(X, Y) = 0$. ■

На основу коваријансе за случајне променљиве X, Y можемо дефинисати *коэффициент корелације*:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \quad (4.8)$$

Коефицијент $\rho(X, Y)$ представља меру тзв. *линеарне зависности* случајних променљивих X и Y , о чему говоре следећа његова својства.

Теорема 4.3.6. Нека су X, Y произвољне случајне променљиве такве да је $D(X) > 0$ и $D(Y) > 0$. Тада важи:

$$(i) |\rho(X, Y)| \leq 1;$$

(ii) $|\rho(X, Y)| = 1$ ако и само ако је $Y = aX + b$, где је $a \neq 0$ и притом је:

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0; \end{cases}$$

(iii) Ако су X, Y независне случајне променљиве, онда је $\rho(X, Y) = 0$. ■

Навешћемо још неке од термина који се уобичајено користе приликом практичне интерпретације коефицијента корелације:

Дефиниција 4.3.3. За случајне променљиве X и Y кажемо да су:

- *некорелисане* ако је $\rho(X, Y) = 0$,
- *позитивно корелисане* ако је $\rho(X, Y) > 0$,
- *негативно корелисане* ако је $\rho(X, Y) < 0$.

На крају, нагласимо да из независности случајних променљивих X и Y , а на основу тврђења (iii) претходне теореме, следи њихова некорелисаност. Међутим, појмови некорелисаности и независности нису еквивалентни.

4.3.2 Карактеристичне функције

У разним применама теорије вероватноће посебно су значајне трансформације функција густине, односно, у општем случају, функција расподеле случајних променљивих. Омогућавају нам једноставнија израчунавања и доказивања многих резултата, па имају, као што ћемо видети, нарочито важну улогу у даљим излагањима. У овом одељку дајемо формалну дефиницију ових трансформација, као и нека њихова битнија својства.

Дефиниција 4.3.4. Нека је X произвољна случајна променљива. Функција дефинисана као математичко очекивање:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (4.9)$$

назива се *карактеристична функција* случајне променљиве X .

Наредним тврђењем описујемо неке од особина карактеристичних функција које непосредно следе из њене дефиниције.

Теорема 4.3.7. За произвољну случајну променљиву X и њену карактеристичну функцију $\varphi_X(t)$ важи:

(i) $\varphi_X(0) = 1, \quad |\varphi_X(t)| \leq 1, \quad \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$;

(ii) Ако је $Y = aX + b$, онда је $\varphi_Y(t) = \varphi_X(t)e^{itb}$;

(iii) Функција $\varphi_X(t)$ постоји и униформно је непрекидна на скупу \mathbb{R} ;

(iv) Ако постоје моменти $E(X^k), k \in \mathbb{N}$, онда је:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} (it)^k. \quad (4.10)$$

Теорема 4.3.8 (Леви). Карактеристична функција ма које случајне променљиве X јединствено је одређена њеном расподелом, тј. различитим карактеристичним функцијама одговарају различите расподеле, и обратно. ■

Претходни резултат, познат и као *теорема Левија* или *теорема о јединствености*, карактерише карактеристичне функције у односу са њима одговарајућим расподелама. Помоћу теореме Левија утврђује се, дакле, узајамно једнозначна кореспонденција карактеристичних функција и њима одговарајућих расподела случајних променљивих. У томе се, између осталог, огледа и значај карактеристичних функција. Наиме, оне карактеришу одговарајућу расподелу, па се *методом карактеристичних функција* једноставно одређују, рецимо, расподеле збира (двеју или више) случајних променљивих, о чему сведочи наредна чињеница.

Теорема 4.3.9. Ако су X и Y независне случајне променљиве, онда је:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Применом претходно наведених резултата могу се одредити карактеристичне функције неких важнијих расподела. У наредном одељку биће више речи о овом поступку.

4.3.3 Конвергенције низова случајних променљивих

Примена теорије вероватноћа у изучавању карактера случајности догађаја и различитих динамичких система уопште постаје нарочито значајна приликом реализација бесконачних фамилија случајних променљивих. Још на самом зачетку вероватноће као науке уочене су неке правилности приликом великог броја реализација једноставнијих статистичких експеримената. Тако је, рецимо, познати француски математичар Буфон бацио новчић чак 24000 пута, при чему је грб добио 12012 пута. Фреквенција појаве грба у овом експерименту је 0,5005 и указује да се, у граничном смислу, може сматрати да је сама вероватноћа овог догађаја једнака „идеалној“ вредности $p = 1/2$.

Формално описивање оваквих „граничних“ резултата јесте један од основних циљева овог одељка. Стога најпре уводимо различите облике конвергенција низова случајних величина, као и најпознатије чињенице које одатле произилазе, познате као граничне теореме теорије вероватноће.

Означимо са $(X_n), n \in \mathbb{N}$ произвољан низ случајних променљивих. Слично као у реалној анализи, могуће је описати гранично понашање овог низа, при чему се, као што ћемо видети, сам појам конвергенције може формулисати на неколико различитих начина.

Дефиниција 4.3.4. Нека је $(X_n), n \in \mathbb{N}$ произвољан низ случајних променљивих које су дефинисане над истим простором вероватноћа (Ω, \mathcal{F}, P) . Казаћемо да низ (X_n) конвергира ка случајној променљивој X , и то:

(i) у вероватноћи, у ознаци $X_n \xrightarrow{P} X$, ако за произвољно $\varepsilon > 0$ важи:

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad (4.11)$$

(ii) скоро извесно, у ознаци $X_n \xrightarrow{si} X$, ако је:

$$P\{X_n \rightarrow X\} = 1 \quad (4.12)$$

(iii) средњеквадратно, у ознаци $X_n \xrightarrow{sk} X$, ако важи:

$$E |X_n - X|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad (4.13)$$

(iv) у расподели, у ознаци $X_n \xrightarrow{d} X$, ако за сваку тачку непрекидности x функције расподеле случајне променљиве X важи:

$$F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Унутар наведених облика конвергенције важи посебан однос, који исказујемо наредним тврђењем.

Теорема 4.3.10. За произвољан низ случајних променљивих X_n , као и случајну променљиву X , важи:

$$(i) \text{ Ако } X_n \xrightarrow{si} X, \text{ онда } X_n \xrightarrow{P} X;$$

$$(ii) \text{ Ако } X_n \xrightarrow{sk} X, \text{ онда } X_n \xrightarrow{P} X;$$

$$(iii) \text{ Ако } X_n \xrightarrow{P} X, \text{ онда } X_n \xrightarrow{d} X.$$

Одговарајућим примерима може се показати да не постоји ниједна „веза“ која није описана овом шемом, односно претходном теоремом (за више детаља видети, рецимо, (Стојановић, В., 2012; Јоксимовић & Стојановић, 2019)).

Формулисаћемо сада неколико тврђења која, користећи неке од горенаведених облика конвергенције случајних променљивих, исказују одређене законитости о понашању бесконачних фамилија (низова) случајних променљивих. Те чињенице имаће, као што ћемо ускоро видети, вишеструку примену и изузетан значај у различитим практичним применама теорије вероватноће, пре свега у статистичкој анализи понашања реалних временских података (серија). Најпре, у нешто једноставнијем облику формулишемо тзв. *слаби закон великих бројева*.

Теорема 4.3.11 (Хинчин). Нека је $(X_n), n \in \mathbb{N}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са математичким очекивањем $\mu = E(X_n)$ и дисперзијом $\sigma^2 = D(X) < +\infty$. Тада важи:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} \mu, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Доказ. Ако уведемо низ случајних променљивих:

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k,$$

онда на основу претпоставки теореме имамо:

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

Применом неједнакости Чебишева (4.7) и једнакости Бијенамеа (4.6) добијамо:

$$P\{|Y_n - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E|Y_n - \mu|^2}{\varepsilon^2} = \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{k=1}^n D(X_k) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \blacksquare$$

Следеће тврђење, познато као строги закон великих бројева, конвергенцију (4.15) исказује у терминима скоро извесне конвергенције.

Теорема 4.3.12 (Колмогоров). Нека је $(X_n), n \in \mathbb{N}$ низ независних случајних променљивих са математичким очекивањем μ , коначним другим моментима и такав да је:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < +\infty.$$

Тада важи:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{si} \mu, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Штавише, ако су (X_n) независне случајне променљиве са истом расподелом и $E|X_1| < +\infty$, онда из конвергенције (4.16) следи $\mu = E(X_n)$. ■

Због обимности изостављамо доказ овог фундаменталног резултата руског математичара Андреја Колмогорова. Ипак, приметимо да он значајно уопштава претходно тврђење Хинчина. Наиме, овде се конвергенција аритметичких средина низа (X_n) исказује у јачем облику, скоро извесне конвергенције, али и доказује да је она потребан услов да гранична вредност у (4.16) буде једнака математичком очекивању случајних променљивих X_n . С друге стране, закон великих бројева Колмогорова има слабије захтеве од Хинчиновог закона, јер се не захтева једнакост расподела чланова низа (X_n) .

4.3.4 Неки модели стохастичких расподела

У овом одељку биће укратко описане неке од важнијих теоријских расподела, тј. модели неких важнијих случајних променљивих. Истакнимо да ће већина ових модела бити касније коришћена и примењена у наредном поглављу, тј. практичном моделовању динамике временских серија које се, пре свега, односе на инфлуенцију вируса корона у периоду од његовог појављивања на територији Републике Србије до па све до данас.

4.3.4.1 Модел биномне расподеле

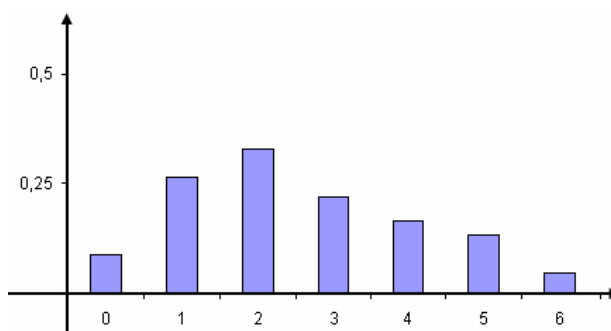
Као један од најважнијих примера случајних променљивих навешћемо случајне променљиве са тзв. *Бернулијевом (биномном) расподелом*, које добијамо узастопним понављањем неког експеримента (опита) тачно n пута, при чему су све реализације међусобно независне. Притом се региструје реализација извесног догађаја D , чија је

вероватноћа $p = P(D)$, док је $q = P(D^c) = 1 - p$ вероватноћа супротног догађаја. Ако са S_n означимо случајну променљиву која региструје број реализација догађаја D у наведених n понављања, онда распоред вероватноћа за S_n можемо написати у облику:

$$p_k = P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Овим изразом описана је биномна расподела случајне променљиве S_n , са параметрима n и p , или краће – $S_n : \mathcal{B}(n, p)$.

На Слици 4.3 приказан је графикон расподеле биномне случајне променљиве са параметрима $n = 6$ и $p = 1/3$. Истакнимо да слично понашање имају још неке важне расподеле случајних променљивих о којима ће више речи бити касније. Приметимо, такође, да тзв. *индикатор догађаја*:



Слика 4.3 Модел биномне расподеле.

$$I_A: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

где је $p = P(A)$, представља најједноставнији пример биномне случајне променљиве са параметром $n = 1$. У општем случају, за случајну променљиву S_n са биномном $\mathcal{B}(n, p)$ расподелом важи:

$$S_n = \sum_{k=1}^n I_{A_k},$$

где су I_{A_k} независне случајне променљиве са истом расподелом као I_A . Одавде се једноставно добија *математичко очекивање* за S_n :

$$\mu = E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(I_{A_k}) = np.$$

Слично, применом једнакости Бијенамеа (4.6) добија се *варијанса*:

$$\sigma^2 = D(S_n) = \sum_{k=1}^n D(I_{A_k}) = np(1-p).$$

Треба такође истаћи да се у оригиналној формулацији Јакоба Бернулија закони великих бројева који су описани у претходном одељку односе на низове случајних променљивих са биномном $\mathcal{B}(n, p)$ расподелом, при чему је $E(S_n) = np$. Тада, тзв. *Бернулијев закон великих бројева* можемо формулисати на следећи начин:

Теорема 4.3.13. Ако је за свако $n \in \mathbb{N}$ задат низ случајних променљивих $S_n: \mathcal{B}(n, p)$, онда важи конвергенција:

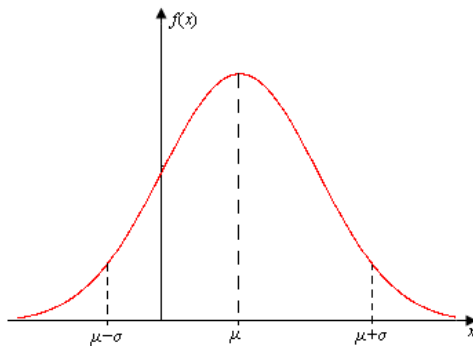
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p, \quad n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

4.3.4.2 Модел нормалне расподеле

Најзначајније модели случајних променљивих јесу, сасвим сигурно, случајне променљиве са тзв. *нормалном расподелом*. Њихова расподела дата је функцијом (густином):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где су μ и $\sigma > 0$ параметри које називамо аритметичка средина (средња вредност) и стандардна девијација дате случајне променљиве.



Слика 4.4. Густина нормалне расподеле.

На Слици 4.4 приказан је график функције $f(x)$, тј. густине нормалне расподеле. Чињеницу да случајна променљива X има нормалну расподелу са задатим параметрима означавамо, краће, са:

$$X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Посебно је важан тзв. *стандардизован облик нормалне расподеле*, где је $\mu = 0$ и $\sigma = 1$. Њена густина гласи:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а чињеницу да случајна променљива, означимо је са Z , поседује овакву расподелу записаћемо са:

$$Z : \mathcal{N}(0, 1).$$

Иначе, показује се да свака случајна променљива $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ може бити трансформисана у стандардизован $\mathcal{N}(0, 1)$ облик применом формуле:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}. \quad (4.17)$$

Како је на основу једнакости (4.17):

$$E(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2} dz = 0,$$

применом раније наведених особина математичког очекивања следи:

$$E(X) = \mu + \sigma E(Z) = \mu.$$

Слично, применом особина дисперзије наведених у Теорему 4.3.2 за случајну променљиву X са нормалном $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ расподелом имамо:

$$D(X) = D(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 D(Z),$$

где је $Z : \mathcal{N}(0,1)$. Применивши резултате које смо добили за математичко очекивање ове случајне променљиве, тј. $E(Z) = 0$, добијамо:

$$D(Z) = E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = 1.$$

Спајајући претходне две једнакости закључујемо да случајна променљива X има дисперзију:

$$D(X) = \sigma^2.$$

Најзад, применом резултата:

$$E(Z^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \\ (2k - 1)!!, & n = 2k \end{cases}$$

као и формуле (4.13) добијамо карактеристичну функцију ове случајне променљиве:

$$\varphi_Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E(Z^{2k}) \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k - 1)!! \frac{(it)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{2^k k!} = e^{-t^2/2}.$$

Ако је $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, онда на основу $X = \sigma Z + \mu$ и особине (ii) у Теорему 4.7 имамо:

$$\varphi_X(t) = \varphi_Z(\sigma t) e^{it\mu} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + it\mu}.$$

Може се показати да огроман број расподела случајних променљивих показује, у граничном смислу, конвергенцију ка нормалној расподели. Стога нормалне расподеле имају изузетан практични значај јер омогућавају апроксимацију најразличитијих типова расподела једном истом граничном расподелом и, самим тим, поједностављује се решавање многих проблема и израчунавања која се могу изразити са задатом тачношћу. Сам њихов назив *централне граничне теореме* указује, пре свега, на њихову важност у применама. Овде најпре показујемо основни облик ове теореме за суме независних случајних променљивих са истом расподелом и коначном дисперзијом.

Теорема 4.3.14. Нека је (X_n) , $n \in \mathbb{N}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са математичким очекивањем $\mu = E(X_1)$, као и дисперзијом $\sigma^2 = E(X_1) < +\infty$. Тада важи конвергенција:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, n \rightarrow \infty, \quad (4.18)$$

где је $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Доказ. Означимо за свако $n \in \mathbb{N}$ случајне променљиве:

$$Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu).$$

Даље, нека су:

$$\varphi(t) = E(e^{-it(X_1 - \mu)}), \quad \varphi_n(t) = E(e^{-itY_n})$$

карактеристичне функције за $X_1 - \mu$ и Y_n , респективно. Тада, применом особине (4.10) карактеристичних функција имамо:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(X_1 - \mu)^k = 1 + it \underbrace{E(X_1 - \mu)}_0 + \frac{(it)^2}{2} \underbrace{E(X_1 - \mu)^2}_{\sigma^2} + o(t^2) \\ &= 1 - \frac{(\sigma t)^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

односно:

$$\varphi_n(t) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n.$$

Одавде је очито:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right)^n = e^{-t^2/2},$$

Па, према теореме Левија о карактеризацији конвергенције у расподели (Теорема 4.3.8), следи конвергенција (4.18). ■

Дајемо сада најопштију формулацију централне граничне теореме, из које произилазе све њене остале варијанте, укључујући и претходну теорему. Притом, претпоставићемо да случајне променљиве X_1, X_2, \dots, X_n немају (обавезно) исту расподелу, па стога за произвољно $n \in \mathbb{N}$ уведемо следеће ознаке:

$$F_n(x) = P\{X_n < x\}, \quad \mu_n = E(X_n), \quad \sigma_n^2 = D(X_n).$$

Ако, додатно, за делимичне суме $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ означимо:

$$M_n = E(S_n) = \sum_{k=1}^n \mu_k, \quad D_n^2 = D(S_n) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$$

онда важи:

Теорема 4.3.15 (Линдеберг). Нека је (X_n) низ независних случајних променљивих такав да је за произвољно, али фиксирано $\varepsilon > 0$ испуњен тзв. *Линдебергов услов*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-\mu_k| > \varepsilon D_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = 0. \quad (4.19)$$

Тада важи конвергенција:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, n \rightarrow \infty, \quad (4.20)$$

где је $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. ■

Показује се да конвергенција описана у Теорему 4.3.15 представља последицу Теореме 4.3.14, односно да за независне случајне променљиве (X_n) са истом расподелом и коначном дисперзијом σ^2 важи Линдебергов услов (4.19).

4.3.4.3 χ^2 расподела

Нека су X_1, \dots, X_n независне случајне променљиве са стандардном нормалном $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом. За случајну променљиву:

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

кажемо да има χ^2 расподелу (са n степени слободе). На Слици 4.5 приказани су графици густина χ^2 расподела, означене са $g_n(y)$ за различите вредности $n \in \mathbb{N}$. Приметимо да је тек за $n \geq 3$ функција $g_n(y)$ дефинисана у тачки $y = 0$. Тада је функција густине χ^2 расподеле дефинисана за све ненегативне реалне вредности, тј. за $y \geq 0$. На основу дефиниције случајне променљиве χ_n^2 лако можемо уочити да је:

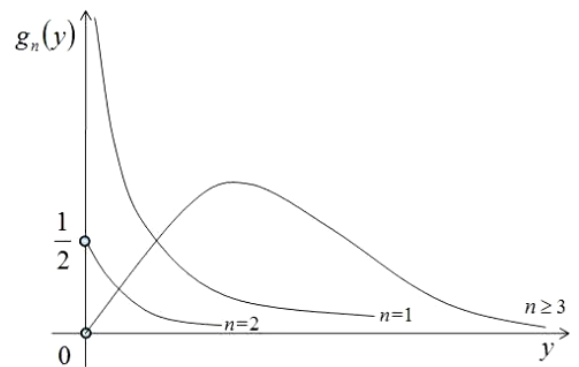
$$E(\chi_n^2) = n, \quad D(\chi_n^2) = 2n.$$

Такође, карактеристична функција за χ^2 расподелу је:

$$\varphi_n(t) = (1 - 2it)^{-n/2},$$

на основу чега се показује:

Теорема 4.3.16. Ако су за неко $n \in \mathbb{N}$ случајне променљиве χ_m^2 и χ_n^2 независне, онда је:



Слика 4.5. Густине χ^2 расподеле

$$\text{а) } \chi_m^2 + \chi_n^2 = \chi_{m+n}^2; \quad \text{б) } \chi_m^2 - \chi_n^2 = \chi_{m-n}^2, \text{ за } m > n.$$

Доказ. а) Нека су $\varphi_m(t) = (1 - 2it)^{-m/2}$ и $\varphi_n(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$ карактеристичне функције за случајне променљиве χ_m^2 и χ_n^2 , респективно. Из независности ових случајних променљивих и Теореме 4.3.9 закључујемо да карактеристична функција за χ_{m+n}^2 гласи:

$$\varphi_m(t)\varphi_n(t) = (1 - 2it)^{-\frac{m}{2}}(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} = (1 - 2it)^{-\frac{(m+n)}{2}} = \varphi_{m+n}(t).$$

Одавде, примењујући теорему Левија о јединствености, следи тврђење овог дела теореме.

б) Доказује се слично као под а). ■

4.4 ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И МЕТОДИ СТАТИСТИЧКЕ АНАЛИЗЕ

Статистика представља научну дисциплину намењену прикупљању, анализи и тумачењу разних типова података, а чини је скуп метода које доприносе да се дође до веродостојних закључака и одлука у условима неизвесности. Дакле, основна улога статистичких метода јесте успешна анализа и доношење закључака о особинама одређене појаве, али и процена, предвиђање будућих стања и испитивање различитих претпоставки (хипотеза) о одређеној појави. Савремена статистика се јавља се у два основна аспекта:

- *математичка (теоријска) статистика* одређује правилан однос статистичких метода и усавршава нове статистичке методе, описује их и доказује. Теорија вероватноће је фундаментална област на којој је заснована математичка статистика.
- *примењена статистика* подразумева примену нових и већ прихваћених теоријских метода, правила и закона у решавању конкретних реалних проблема.

Статистику такође можемо поделити и на следећа два нивоа:

- *дескриптивна статистика* усмерена је искључиво на основне методе прикупљања, обраде и презентације статистичких података на јасан и разумљив начин. Она укључује различите нумеричке и графичке процедуре намењене приказивању прикупљених података⁶.
- *инференцијална (аналитичка) статистика* садржи скуп статистичких метода којима се врши квалитативна интерпретација прикупљених података, и тиме омогућава формулисање закључака и законитости о посматраним појавама.

Предмет истраживања савремене статистике јесу масовне појаве које показују различит варијабилитет на који утиче велики број фактора. Применом одговарајуће

⁶ Подсетимо да смо у претходном поглављу већ користили неке од дескриптивних статистичких метода у циљу прелиминарног, квантитативног описивања степена имунизације становништва у борби против болести COVID-19.

методологије статистичка анализа таквих појава даје увид у њихово понашање, уочава се њихова повезаност са другим варијабилним појавама, уочавају тенденције у њиховом развоју или предвиђају њихове будуће вредности. Примена статистичке методологије захтева, пре свега, познавање статистичке терминологије и разумевање основних принципа статистичке анализе. Стога ћемо сада најпре дефинисати неке од основних статистичких појмова:

- *статистички скуп (популација)* представља скуп тзв. *статистичких јединица* на основу којих се испитује једно или више својстава (особина, карактеристика) дате популације. Према обиму статистички скупови се деле на коначне и бесконачне, а такође могу бити реални и замишљени (хипотетички). Број јединица основног скупа назива се *величина* или *обим* основног скупа (у ознаци N).
- *узорак* је део основног скупа над којим се испитују статистичка својства његових елемената, тј. узорак је изабран у сврху извођења конкретне статистичке анализе. Број елемената узорка се зове *величина* или *обим узорка* (у ознаци n).
- *обележје* (X) представља особину популације која се проучава статистичким методима. У односу на вредности које имају обележја могу бити:
 - *квалитативна (атрибутивна, категоријална) обележја* описују особине статистичког скупа које се исказују описно, тј. класификују се у две или више категорија (атрибута, случајева);
 - *квантитативна (нумеричка) обележја* описују особине које се могу мерити и исказати бројчано (квантитативно, нумерички).

Даље, нумеричка обележја делимо на:

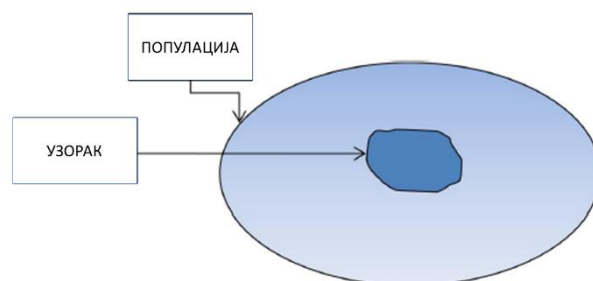
- *прекидна (дискретна, дисконтинуирана)*, која узимају само коначне или пребројиве нумеричке вредности, тј. резултат су пребројавања;
- *непрекидна (континуирана)* су нумеричка обележја која могу узети било коју нумеричку вредност и резултат су мерења.

Истакнимо да су, са становишта статистичке обраде података, нумеричка обележја знатно погоднија од атрибутивних. Стога, не умањујући општост, надаље ћемо посматрати искључиво нумеричка обележја, која можемо формално дефинисати функцијом $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_X$, где је $\mathbb{R}_X \subseteq \mathbb{R}$ скуп свих вредности, тј. *модалитета* датог обележја. Штавише, ако претпоставимо да је на популацији Ω задато поље догађаја \mathcal{F} , као и вероватноћа P , онда за (нумеричко) обележје X , као и за све случајне променљиве, претпостављамо *мерљивост* у односу на поље догађаја \mathcal{F} . Дакле, свако нумеричко обележје X можемо интерпретирати, са стохастичког становишта, као случајну променљиву, па ће само обележје бити у потпуности одређено ако је позната његова *расподела*.

Тако одређивање расподела обележја јесте један од основних проблема којима се бави теоријска статистика. Најчешће, расподела обележја X није позната, већ припада тзв. *фамилији допустивих расподела*, из које треба направити прави избор на основу вредности непознатих параметара који се појављују у тој расподели. Ове (непознате) параметре уобичајено обележавамо са θ , при чему претпостављамо да они припадају тзв. *допустивом скупу вредности параметара θ* . С тим у вези, рећи ћемо да треба одредити *густину расподеле* обележја X , која зависи од (непознатог) параметра $\theta \in \Theta$. Густину расподеле за X тада записујемо са $f(x, \theta)$, а одговарајућу функцију расподеле са $F(x, \theta)$. Притом, обе ознаке и термине користимо, у уопштеном значењу, како за случајне променљиве непрекидног, тако и за случајне променљиве дискретног типа.

4.4.1 Статистика узорка

Већ смо истакли да је узорак један од основних и најважнијих појмова статистике. Да се подсетимо, узорак представља репрезентативан део основног скупа (популације) на коме се региструје вредност обележја X . Дакле, узорак је део популације, изабран на специфичан начин, чијом анализом добијамо резултате помоћу којих можемо извести довољно ваљане закључке о вредностима параметара читаве популације. Број чланова (елемената) узорка ћемо обележавати са n . Притом, приметимо да се све информације о расподели датог обележја добијају искључиво на основу изабраног узорка. Стога је важно да узорак буде репрезентативан, односно да је по својој структури сличан основном скупу (Слика 4.6). Тек тада се на основу њега може донети, са одређеном тачношћу, правилан закључак о расподели обележја X .



Слика 4.6. Репрезентативност узорка

Према начину избора узорка из популације, узорке делимо у две основне групе: на *случајне (пробабилитичке)* и *намерне (непробабилитичке)*. Случајни узорак је онај узорак код кога је вероватноћа избора сваког елемента из популације у узорак унапред позната и различита од нуле. Сви остали методи избора узорка су неслучајни или намерни. Са становишта теорије вероватноће, знатно су квалитетнији случајни узорци, јер се само на основу њих може донети, са одређеном тачношћу, правилан закључак о расподели обележја X . Постоји више различитих начина добијања случајног узорка из популације. Најзначајнији међу њима је *прост случајни узорак*, који ће углавном бити предмет даље анализе.

Како се при извођењу статистичког експеримента полази од претпоставке да се том приликом реализују неки случајни догађаји, односно да се исход експеримента може приказати случајном променљивом X , то и сам узорак можемо приказати случајним величинама. Уколико је експеримент понављан n пута, његов исход се представља случајним вектором:

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Притом, као и код обележја X , за проучавање овог случајног вектора пожељно је познавати његову расподелу. У најједноставнијем случају, када су све компоненте X_1, X_2, \dots, X_n вектора \mathbf{X} независне случајне променљиве са истом расподелом као и обележје X , вектор \mathbf{X} називамо *простим случајним узорком*. С друге стране, реализацију вектора \mathbf{X} по обављеном статистичком експерименту описаћемо вектором:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дакле, овај вектор представља реализоване вредности узорка \mathbf{X} , па вектор \mathbf{x} зовемо *реализовани узорак*. Вероватноћа реализације узорка \mathbf{x} одређена је расподелом случајног вектора \mathbf{X} . У случају простог случајног узорка, при раније уведеним ознакама, ову расподелу описујемо заједничком густином вектора \mathbf{X} , тј. функцијом облика:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta). \quad (4.21)$$

У сваком од узорака можемо израчунати аритметичку средину тог узорка:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

У скупу свих могућих простих случајних узорака величине n вредности аритметичких средина се разликују и „варирају“ од узорка до узорка. Стога их можемо посматрати као реализоване вредности „новог“ обележја, дефинисаног на скупу свих узорака обима n . Ово обележје, као и сва остала обележја, има своје параметре расподеле. У ту сврху, означимо са μ и σ^2 , редом, математичко очекивање и дисперзију обележја X . На основу познатих особина математичког очекивања за случајну променљиву \bar{X}_n важи:

$$\mu_{\bar{X}_n} = E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \underbrace{E(X)}_{\mu} = \mu. \quad (4.22)$$

Слично, из независности случајних променљивих X_1, \dots, X_n на основу једнакости Бијенамеа (4.6) следи да аритметичка средина узорка има дисперзију:

$$\sigma_{\bar{X}_n}^2 = D(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \frac{D(X)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (4.23)$$

Облик распореда аритметичких средина узорка такође зависи од облика распореда основног скупа, односно обележја X , али и од обима узорка n . Ако обележје X има нормалну $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ расподелу, онда и средина узорка, посматрана као ново обележје \bar{X} датог скупа, такође, има нормални распоред. Наиме, важи:

Теорема 4.4.1. Ако обележје X има нормалну $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ расподелу, тада аритметичка средина узорка \bar{X} има нормалну $\mathcal{N}(\mu_{\bar{X}_n}, \sigma_{\bar{X}_n}^2)$ расподелу, где су параметри $\mu_{\bar{X}_n}, \sigma_{\bar{X}_n}^2$ дати са (4.22)-(4.23).

Доказ. Означимо са:

$$\varphi(t) = E(e^{itX}), \quad \varphi_n(t) = E(e^{it\bar{X}_n}),$$

карактеристичне функције случајних променљивих X и \bar{X}_n , респективно. Како је, по претпоставци, $X: \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то ће карактеристична функција за X бити:

$$\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + it\mu}.$$

Применом познатих особина карактеристичних функција имамо да је:

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^n E(e^{(itX_k)/n}) = \left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n = \left[e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n^2} + \frac{it\mu}{n}} \right]^n = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n} + it\mu}.$$

Из последње једнакости и Теореме Левија 4.3.8 о јединствености кореспонденције између карактеристичних функција и њима одговарајућих расподела следи тврђење теореме. ■

Нагласимо да, чак и ако облик расподеле обележја X одступа од нормалне, аритметичка средина узорка, а на основу Централне граничне теореме 4.3.15, има приближно нормалну расподелу. Наравно, предуслов за то јесте да је обим узорка довољно велик. Обично се апроксимација нормалном расподелом врши када је задовољен услов $30 \leq n < N/2$.

4.4.2 Оцене параметара

Као што смо већ истакли, основни задатак теоријске статистике јесте налажење расподела одређеног обележја. Притом, може се претпоставити да посматрано обележје припада некој од фамилија допустивих расподела. Тиме се проблем одређивања непознате расподеле за обележје X знатно поједностављује, јер се своди на одређивање вредности параметра θ . Ипак, статистичким методима не можемо наћи тачну вредност за θ , већ

непознати параметар оцењујемо на основу узорка, тј. примењујемо *поступак статистичког оцењивања*, који сада детаљније описујемо.

Обележимо са θ параметар популације који желимо да оценимо помоћу неке оцене добијене из простог случајног узорка величине n :

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n).$$

За дати узорак из популације код које обележје X има закон расподеле $f(x, \theta)$, са непознатим параметром θ , метод статистичког оцењивања састоји се од дефинисања функције (статистике) узорка U_n која даје „приближну“ вредност параметра θ , израчунате на основу реализованог узорка $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Вредност оцене U_n зависиће од изабраног узорка, па је оцена U_n функција узорка, тј. облика:

$$U_n = \Phi(X_1, \dots, X_n).$$

Наравно, важно је описати услове под којима је U_n „добра“ оцена за θ . Ваљаност ове оцене утврђује се на основу одређених критеријума, о којима ће надаље бити речи.

Дефиниција 4.4.1. Статистика U_n , добијена на основу узорка (X_1, \dots, X_n) из популације са обележјем X , јесте *непристрасна* или *центрирана* оцена параметра θ ако је њено математичко очекивање једнако вредности параметра θ , тј. $E(U_n) = \theta$.

Пример 4.4.1. Нека је $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ случајни узорак из популације са обележјем X за коју је непознати параметар математичко очекивање $E(X) = \theta$. Средина узорка:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

је непристрасна оцена параметра θ , јер важи:

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{E(X_k)}_{\theta} = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta. \blacksquare$$

Пример 4.4.2. Нека је дато обележје X које има коначну дисперзију $\theta = D(X)$. Као оцена овог параметра најчешће се користи узорачка дисперзија:

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \bar{X}_n^2.$$

Ипак, она није непристрасна оцена за θ , јер у овом случају показује се да важи:

$$E(\bar{S}_n^2) = \frac{n-1}{n} \theta. \blacksquare$$

Претходни пример указује на могућност задавања следећег, „слабијег“ својства оцена непознатог параметра.

Дефиниција 4.4.2. Статистика U_n , добијена на основу узорка (X_1, \dots, X_n) из популације са обележјем X , јесте *асимптотски непристрасна (центрирана)* оцена параметра θ , ако важи:

$$E(U_n) \rightarrow \theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пример 4.4.3. Како је у претходном примеру:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{S}_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \theta = \theta,$$

то је дисперзија узорка асимптотски непристрасна оцена дисперзије обележја $\theta = D(X)$. ■

Дефиниција 4.4.3. Статистика $U_n = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ је *најефикаснија (најбоља)* оцена параметра θ ако је непристрасна и ако за било коју другу непристрасну оцену Y_n важи:

$$D(U_n) \leq D(Y_n).$$

Дакле, ефикасност непристрасне оцене за параметар θ изражава се њеном дисперзијом. Стога ова особина представља један од основних начина за утврђивање квалитета таквих оцена. Управо зато овом појму посветићемо још пажње и у наредном делу. Засад формулишемо још један критеријум који одликује „добре“ оцене непознатих параметара.

Дефиниција 4.4.4. Статистика $U_n = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ је *постојана (стабилна)* оцена за параметар θ ако она конвергира у вероватноћи ка θ , тј. ако је за свако $\varepsilon > 0$:

$$P\{|U_n - \theta| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

У случају да је ова конвергенција скоро извесна, тј. $P\{U_n \rightarrow \theta\} = 1$, онда је U_n *строго постојана*.

Пример 4.4.4. Ако је непознати параметар математичко очекивање $E(X) = \theta$ онда на основу Хинчиновог закона великих бројева (Теорема 4.3.11) за средину узорка важи:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} E(\bar{X}) = \theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Штавише, на основу закона великих бројева Колмогорова (Теорема 4.3.12) следи скоро извесна конвергенција:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{si} \theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Дакле, средина узорка је (строго) постојана оцена за математичко очекивање. ■

У даљем тексту описујемо неке од често коришћених ефективних поступака налажења тачкастих оцена непознатог параметра θ . Најпре ћемо пажњу посветити познатом *методу максималне веродостојности*, а затим и поступку познатом као *метод момената*.

4.4.2.1 *Метод максималне веродостојности*

Метод максималне веродостојности (звaћемо га краће и *МВ метод*) јесте општи метод оцењивања непознатих параметара који се примењује код разних фамилија расподела. Оцене добијене *МВ* методом не морају имати све теоретске атрибуте „квалитетних“ оцена, пре свих, особина непристрасности код *МВ* оцена често није испуњена. Ипак, показује се да су овакве оцене, нарочито код великих узорака, обично најефикасније. Овде разматрамо најједноставнији случај *МВ* оцењивања, када је вредност непознатог параметра $\theta \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 4.4.5. Нека је дата фамилија допустивих густина расподеле $f(x; \theta)$ обележја X и узорак $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ са заједничком густином расподеле:

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta).$$

Заједничка густина, посматрана као функција параметра θ , назива се *функција веродостојности* и означава се:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

Функцију веродостојности често ћемо због једноставности означавати са $L(\theta)$. Оваква ознака оправдана је чињеницом да узорак \mathbf{X} у случају његове реализације постаје „обичан“ низ бројева $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, па је тада једина променљива сам параметар θ . У том случају од интереса је наћи ону вредност $\theta = \hat{\theta}_n$ за коју функција $L(\theta)$ достиже свој максимум.

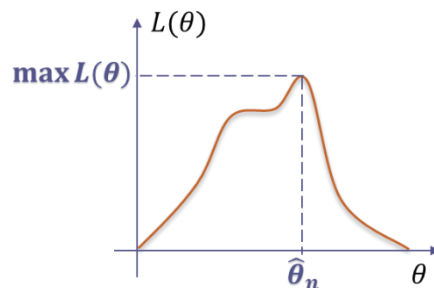
Дефиниција 4.4.6. *Оцена максималне веродостојности (МВ оцена)* непознатог параметра $\theta \in \mathbb{R}$ јесте функција узорка $\hat{\theta}_n = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ за коју се остварује максимум функције $L(\theta)$.

Дакле, *МВ оцена* је статистика узорка $\hat{\theta}_n$ таква да за сваки узорак $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ важи (Слика 4.7):

$$L(\hat{\theta}_n) = \max_{\theta \in \mathbb{R}} L(\theta).$$

Решење претходне једначине обично се одређује логаритмовањем функције $L(\theta)$, тј. решавањем тзв. *једначине веродостојности*:

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (4.24)$$



Слика 4.7. Графички приказ функције веродостојности

Приметимо да је овакав поступак математички оправдан због монотоности функције $\ln x$, тј. чињеницом да функције $L(\theta)$ и $\ln L(\theta)$ имају исте екстремуме. У случају егзистенције јединственог решења једначине веродостојности (4.24), МВ оцена биће строго постојана оцена за параметар θ . О томе сведочи наредно тврђење:

Теорема 4.4.2. Нека фамилија допустивих расподела $f(x; \theta)$ обележја X на скупу $K = \{x \in \mathbb{R} | f(x; \theta) > 0\}$, који не зависи од θ , задовољава следеће услове регуларности:

- i. $\frac{\partial}{\partial \theta} \int_K f(x; \theta) dx = \int_K \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx;$
- ii. $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_K f(x; \theta) dx = \int_K \frac{\partial^2 f(x; \theta)}{\partial \theta^2} dx.$

Ако једначина веродостојности (4.24) има јединствено решење $\theta = \hat{\theta}_n$, онда оцена $\hat{\theta}_n$ задовољава услов стабилности $\hat{\theta}_n \xrightarrow{s.i.} \theta, n \rightarrow \infty$. ■

4.4.2.2 Метод момената

Описујемо сада још један метод тачкастог оцењивања параметара који је увео чувени енглески статистичар Карл Пирсон. Реч је о тзв. *методу момената* који се заснива на следећим чињеницама и претпоставкама: Нека расподела обележја X припада фамилији допустивих расподела $f(x, \theta)$, где су $x, \theta \in \mathbb{R}$. Ако је $E(X) = \mu$, онда се за обележје X , као и за сваку случајну променљиву, могу дефинисати моменти (реда $k = 1, 2, \dots$):

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x; \theta) dx,$$

односно централни моменти:

$$\gamma_k = E(X - \mu)^k = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^k f(x; \theta) dx.$$

Претпоставимо, притом, да вредности μ_k, γ_k постоје и коначне су. Њих називамо *теоретским моментима* (реда k), при чему они, у општем случају, зависе од параметра θ .

С друге стране, за узорак $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из популације са обележјем X може се дефинисати *узорачки момент* (реда k):

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

односно *узорачки централни момент* (реда k):

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k.$$

Типичан пример узорачког момента реда $k = 1$ јесте средина узорка, док је узорачки централни момент реда $k = 2$ дисперзија узорка, које смо већ помињали раније. Притом, постоји зависност узорачких момената не само од њиховог реда k већ и од обима узорка n . Основна својства ових момената можемо исказати следећом теоремом.

Теорема 4.4.2. Узорачки моменти реда k јесу непристрасне и (строго) постојане оцене теоријских момената реда k обележја X .

Доказ. Према претходним дефиницијама и ознакама, за свако $k \in \mathbb{N}$ за које постоје теоретски моменти μ_k важи:

$$E(\hat{\mu}_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^k) = \frac{1}{n} n \mu_k = \mu_k.$$

Дакле, узорачки момент $\hat{\mu}_k$ јесте непристрасна оцена теоретског момента μ_k . Даље, на основу Закона великих бројева Колмогорова важи конвергенција:

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow{si} \mu_k, \quad n \rightarrow \infty,$$

па је $\hat{\mu}_k$ строго постојана оцена за μ_k . На сличан начин се показује непристрасност и постојаност централних момената $\hat{\gamma}_k$. ■

Претходна теорема указује на чињеницу да су, за довољно велики узорак обима n , узорачки моменти $\hat{\mu}_k$ и $\hat{\gamma}_k$ „добре“ оцене теоријских момената μ_k и γ_k . Тако можемо сматрати да је $\hat{\mu}_k \approx \mu_k$, па овим „изједначавањем“ можемо наћи одговарајуће оцене за θ .

Пример 4.4.5. Нека је X обележје са коначним моментом реда $k = 1$. Како су први моменти овог обележја математичко очекивање и средина узорка:

$$\mu_1 = E(X) = \theta, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \bar{X},$$

то оцена за параметар θ по методу момената јесте средина узорка, тј. $\hat{\theta} = \bar{X}_n$. ■

4.5 СЛУЧАЈНИ (СТОХАСТИЧКИ) ПРОЦЕСИ

Случајне функције времена често се јављају у разним областима науке и технике. Системи управљања и праћења објеката, флукуације цена одређених производа, опслуживање клијената на шалтерима представљају типичне примере таквих појава. Промене стања у оваквим системима искључиво су случајног карактера, па се у таквим случајевима *случајни процеси* узимају као погодни математички модели. У овом делу изложићемо основне чињенице које су неопходне за правилно разумевање случајних процеса као посебно значајне области теорије вероватноћа, са многобројним и разноврсним

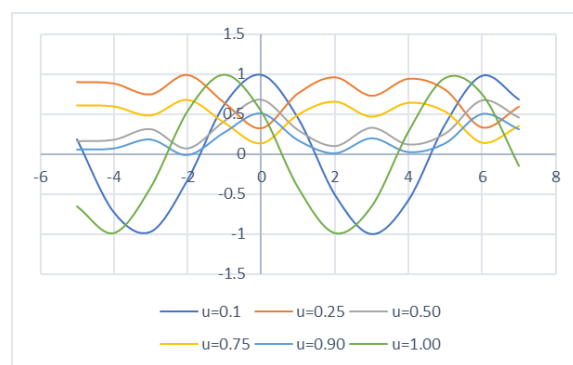
применама⁷. Већ у наредном поглављу ће бити описане неке од примена посебне класе случајних процеса, тзв. *временских серија*. То се првенствено односи на моделовање динамике реалних података који указују на динамику болести COVID-19 у Републици Србији, а на основу података еУправе Републике Србије.

Нека се у сваком временском тренутку t неког интервала T посматра карактеристика X неког случајно изабраног система. Скуп свих случајних променљивих облика $\{X(t) | t \in T\}$ може се посматрати као фамилија случајних величина која се мења у времену, тј. добија се једна случајна функција времена. Тада кажемо да $\{X(t) | t \in T\}$ представља *стохастички (случајни) процес* који можемо формално дефинисати на следећи начин.

Дефиниција 4.5.1. *Стохастички (случајни) процес* $\{X(t) | t \in T\}$ представља фамилију случајних променљивих које су дефинисане на истом простору вероватноћа (Ω, \mathcal{F}, P) . Скуп T назива се *параметарски скуп*, а реални простор \mathbb{R} скуп *стања случајног процеса*, тј. за свако фиксирано $t \in T$ функција $X(t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ јесте једна случајна променљива.

Параметар t , у случају када је $T \subset \mathbb{R}$, обично се интерпретира као *време*. Уколико је T дискретан скуп, онда је реч о *процесима са дискретним временом (временским серијама)*, а ако је T непребројив скуп, онда су то *процеси са непрекидним временом*. За фиксирано временски тренутак $t \in T$, као у претходној дефиницији, $X(t)$ јесте случајна променљива дефинисана на простору елементарних исхода Ω , тј. може се посматрати као функција $X_t(\omega) = X(t, \omega)$ која се назива *засек* или *сечење* датог случајног процеса. С друге стране, за фиксирано $\omega \in \Omega$, може се посматрати реална функција $t \rightarrow X(t, \omega)$ дефинисана на скупу индекса T , која описује еволуцију случајног процеса током времена. Тако долазимо до следећег важног појма.

Дефиниција 4.5.2. Функција која за фиксирано елементарно догађај $\omega \in \Omega$ сваком елементу $t \in T$ придружује вредност случајног процеса $X(t, \omega)$ назива се *трајекторија* или *реализација* случајног процеса $\{X(t) | t \in T\}$.



Слика 4.8. Трајекторије случајног процеса

⁷ Детаљнији увид у основне чињенице о теорији случајних процеса може се наћи, рецимо, у монографијама (Малишић, 1989), (Стојаковић, 1999), (Lindsey, 2003) или (Walrand, 2004).

⁸ Запис скупа T се често изоставља, па ћемо надаље, уколико није другачије назначено, случајне процесе означавати краће са $\{X(t)\}$ или (X_t) .

Трајекторије, дакле, представљају фамилију реалних функција $\{X(t, \omega) | \omega \in \Omega\}$ добијених конкретним реализацијама елементарних догађаја $\omega \in \Omega$, тј. њихов изглед мења се за сваку његову реализацију. На Слици 4.8 приказане су трајекторије случајног процеса $X(t, u) = \cos(t + u)$, где $u = u(\omega)$ представљају случајне изборе бројева унутар јединичног интервала, односно реализације случајне променљиве са тзв. *униформном расподелом* на интервалу $(0,1)$. Приметимо да је реч о периодичним функцијама, при чему вредности $u(\omega)$ утичу на величину периода осцилације и амплитуде.

4.5.1 Расподела и основне карактеристике случајних процеса

За сваки случајни процес од посебног је значаја одређивање заједничке расподеле засека $X(t_1), \dots, X(t_n)$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$ и $t_1, \dots, t_n \in T$. На тај начин долазимо до следећег важног појма:

Дефиниција 4.5.2. *Коначно-димензионалне расподеле* случајног процеса $\{X(t)\}$ дате су редом следећим изразима:

$$\begin{aligned} F_{t_1}(x) &= P\{X(t_1) < x\}, \\ F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) &= P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}, \\ &\vdots \\ F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= P\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\}, \end{aligned}$$

где је $t_i \in T$ и $x_i \in \mathbb{R}$, за свако $i = 1, 2, \dots, n$.

Коначно-димензионалне расподеле, дакле, представљају n -димензионалне функције расподеле које у потпуности одређују стохастичка својства случајног процеса $\{X(t)\}$. Дакле, сваки случајни процес је у стохастичком смислу потпуно описан његовим коначно-димензионалним расподелама. Ипак, налажење расподела произвољног реда може бити веома сложено, понекад и немогуће. Зато се најчешће задовољавамо одређивањем *момената*, тј. уводимо следеће важне стохастичке карактеристике случајних процеса:

- *математичко очекивање (средња вредност)* процеса $\{X(t)\}$ дефинисано је са:

$$m_X(t) = m(t) = E[X(t)]$$

- *дисперзија* случајног процеса $\{X(t)\}$ гласи:

$$D_X(t) = D(t) = E[X^2(t)] - m^2(t)$$

- *аутоковаријациона функција* случајног процеса $\{X(t)\}$ је функција облика:

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= E[(X(t) - m(t))(X(s) - m(s))] \\ &= E[X(t)X(s)] - m(t)m(s). \end{aligned}$$

Користећи наведене карактеристике случајних процеса можемо описати још нека њихова својства.

Дефиниција 4.5.3. Случајни процес $\{X(t)\}$ је процес са независним прираштајима уколико су случајне променљиве $X(t_0)$, $X(t_1) - X(t_0)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ независне за све $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ параметарског скупа T .

Дефиниција 4.5.4. Случајни процес $\{X(t)\}$ је процес са стационарним прираштајима ако случајне променљиве $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ и $X(t_2) - X(t_1)$ имају исту функцију расподеле за свако $t_1 < t_2$.

Дефиниција 4.5.5. Случајни процес $\{X(t)\}$ је строго стационаран ако за свако $n \in \mathbb{N}$, $g > 0$ и $t_1, \dots, t_n \in T$ засеци $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(X_{t_1+g}, \dots, X_{t_n+g})$ имају исту расподелу.

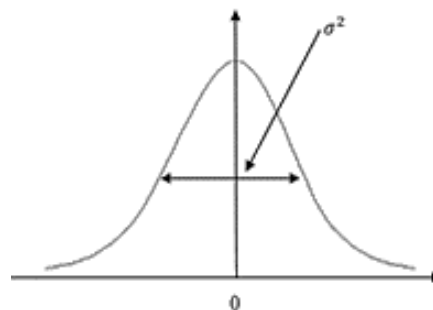
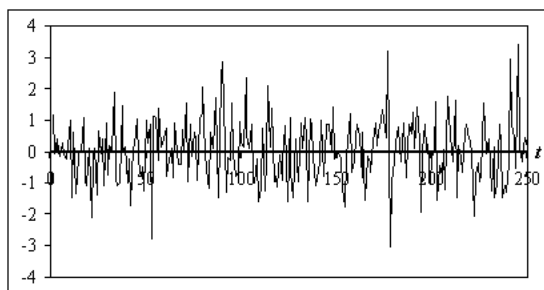
Дефиниција 4.5.6. Случајни процес $\{X(t)\}$ је слабо стационаран (у ширем смислу) ако је његова средња вредност константна функција времена, тј. $E(X(t)) = \mu$ за свако $t \in T$, а коваријанса зависи само од разлике временских аргумената, тј. $K_X(t, s) = \gamma_X(t - s)$ за свако $t, s \in T$, где је $\gamma_X(t - s)$ аутоковаријациона функција процеса $\{X(t)\}$.

Важно је нагласити да су строго стационарни процеси са коначним моментима другог реда уједно и слабо стационарни, док су код реалних Гаусових процеса појмови строге и слабе стационарности еквивалентни.

Пример 4.5.1. Једна од најважнијих стационарних временских серија јесте низ некорелираних случајних величина $\{\varepsilon_t | t \in T\}$ са средњом вредношћу $E(\varepsilon_t) = 0$ и дисперзијом $\sigma^2 = D(\varepsilon_t) > 0$. Овај процес, популарно назван бели шум, често се користи у изградњи сложенијих стационарних низова. Због некорелисаности величина ε_t и ε_{t+h} , коваријациона функција белог шума гласи:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h \neq 0 \\ \sigma^2, & h = 0 \end{cases}$$

То значи да се она разликује од нуле само за исте временске засеке, када њена вредност $\sigma^2 > 0$ представља дисперзију случајног процеса (ε_t) .



Слика 4.9. Типична реализација белог шума (лево) и његова расподела (десно)

На Слици 4.9 дат је графички приказ реализације белог шума са нормалном $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелом. Бели шум је типичан пример потпуно случајног процеса, који на изванстан начин кореспондира са тзв. случајном грешком код неких сложенијих модела, о којима

говоримо у наредном одељку. Сам термин бели шум је изведен из спектралне анализе беле светлости, а ми ћемо под овим појмом подразумевати фамилију случајних променљивих које су некорелисане, са коначном варијансом и очекивањем нула. ■

Као што је већ раније речено, главни задатак моделовања јесте креирање модела који може послужити као идеализовани опис посматране појаве. Код посматрања и моделовања динамике кретања појава током времена основни задатак јесте стварање одговарајућег *стохастичко-динамичког модела*. У наставку ће предмет нашег истраживања бити случајни процеси са дискретним параметарским скупом T , које називамо *случајни процеси са дискретним временом* или, краће, *временске серије*.

Налажење средње вредности $\mu = E(X_t)$ стационарне временске серије $\{X_t\}$ захтева познавање њене једнодимензионалне расподеле. Уколико ова расподела није позната, тада средњу вредност оцењујемо из експерименталних података. Ради одређивања приближне вредности средње вредности потребан је довољан број реализација процеса $\{X_t\}$ за сваку вредност аргумента t . Као што је већ речено у одељку 4.4.2, непристрасна оцена за $\mu = E(X_t)$ јесте аритметичка средина реализација датог процеса. Стога оцењивање треба извршити за свако t за које имамо његове реализације. Овај поступак се знатно поједностављује за класу стационарних случајних процеса, па управо из тих разлога уводимо следећи појам.

Дефиниција 4.5.7. Случајни процес (временска серија) $\{X_t\}$ је *ергодичан* ако низ случајних променљивих:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

тежи у средње квадратном смислу ка $E(X_t)$ када $n \rightarrow +\infty$.

За случајне процесе код којих важи претходна дефиниција још кажемо да су *ергодични у средње квадратном смислу*. Навешћемо сада, без доказа, следећу теорему која даје неопходан и довољан услов ергодичности у средње квадратном смислу.

Теорема 4.5.1. Стационаран случајни процес $\{X_t\}$ је ергодичан у средње квадратном смислу ако и само ако важи:

$$\frac{1}{n} \sum_{\tau=1}^n \left(1 - \frac{\tau}{n}\right) \gamma_x(\tau) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где је $\gamma_x(\tau)$ аутоковаријациона функција процеса $\{X_t\}$.

4.5.2 Линеарни модели временских серија

Један од важнијих метода описивања временских серија јесте њихово разлагање на елементарне серије које, због једноставности, омогућавају да се карактеристике датог случајног процеса испитају на једноставнији начин. Овде разматрамо неке методе приказивања временске серије (X_t) у облику линеарне комбинацију низа некорелисаних случајних величина (ε_t), тј. белог шума, који смо описали у претходном одељку. Иако у самој његовој дефиницији није експлицитно наведена његова расподела, обично се претпоставља да је расподела белог шума *Гаусова (нормална)*, па се такав низ назива *Гаусов бели шум*.

Основна мотивација за изградњу линеарних стохастичких модела, о којима овде говоримо, лежи у жељи истраживача да дају адекватне прогнозе будућих чланова серије, а на основу познатих, претходних реализација датог временског низа. У складу с тим, прогноза будућег члана (означимо га са X_{t+k}) најједноставније се врши ако се ова величина линеарно изрази преко ранијих чланова серије X_t, X_{t-1}, \dots . У складу са начином формирања оваквих временских серија оне се називају *линеарни* или *АРМА*⁹ *случајни процеси*. Сам њихов назив потиче из два основна метода конструкције линеарних модела:

- а) метод покретних просека или *МА метод* (енг. *Moving Average method*)
- б) метод ауторегресије или *АР метод* (енг. *AutoRegression method*).

У даљем излагању описујемо неке од најважнијих стохастичких особина ових модела.

4.5.2.1 Модели покретних просека (МА модели)

Временске серије покретних просека које ћемо, краће, звати МА процеси добијају се разлагањем основног низа (X_t) у облику суме (линеарне комбинације) претходних реализација белог шума (ε_t). Тако се добија израз облика:

$$X_t = \sum_{j=0}^q a_j \varepsilon_{t-j}, \quad (4.25)$$

где је $q > 0$ ненегативан цео број који дефинише величину (димензију) датог случајног процеса, док су a_1, \dots, a_q коефицијенти разлагања који се одређују експерименталним путем. Изразом (4.25) дефинисан је *покретни просек (реда q)*, или краће, *МА(q) процес*.

Како средња вредност и варијанса белог шума износи $E(\varepsilon_t) = 0$, $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$, то ће одговарајући параметри полазног низа (X_t) бити:

$$E(X_t) = 0, \quad D(X_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^q a_i^2.$$

⁹ Реч је о скраћеници енглеског термина: *AutoRegressive Moving Average*.

Најзад, како је:

$$\gamma_\varepsilon(h) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = \begin{cases} 0, & h = 0, \\ \sigma^2, & h \neq 0, \end{cases}$$

аутоковаријациона функција покретног просека реда q дефинисана је изразом:

$$\gamma_X(h) = E(X_t X_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} a_j a_{j+|h|}, & 0 \leq h \leq q, \\ 0, & h > q. \end{cases}$$

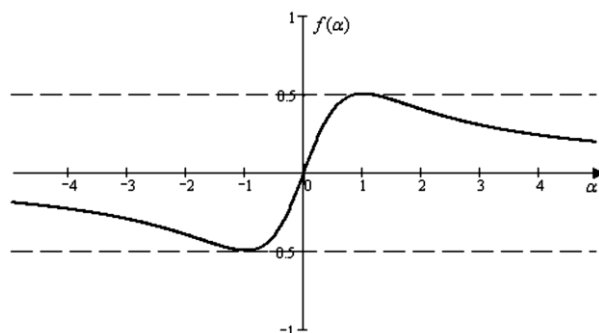
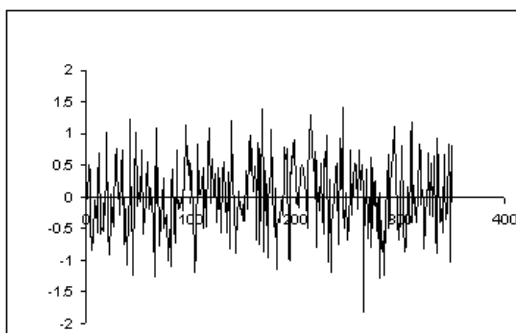
Дакле, коваријанса МА процеса (реда q) различита је од нуле само ако су временски засеци X_t и X_{t+h} на „растојању“ које не прелази вредност реда процеса q . У супротном, X_t и X_{t+h} постају некорелисане случајне величине.

Размотримо детаљније најједноставнији случај МА модела, реда $q = 1$. Једначина овог модела може се написати у облику:

$$X_t = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1},$$

одакле се добијају његове стохастичке карактеристике:

$$E(X_t) = 0, \quad \gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2(a_0^2 + a_1^2), & h = 0, \\ \sigma^2 a_0 a_1, & h = 1, \\ 0, & h > 1. \end{cases}$$



Слика 4.10. Типична реализација (лево) и график прве корелација (десно) МА(1) процеса:

$$X_t = 0,25\varepsilon_t + 0,55\varepsilon_{t-1}$$

На Слици 4.10 (лево) приказана је типична реализација МА(1) процеса, добијена тзв. Монте Карло симулацијом белог шума (ε_t) са стандардном $\mathcal{N}(0, 1)$ Гаусовом расподелом. С друге стране, ако означимо $\alpha = a_1/a_0$, онда корелациону функцију овог процеса можемо написати у облику једнакости:

$$\rho_X(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \alpha, & h = 1, \\ 0, & h > 1. \end{cases}$$

Лако се показује да вредност корелације $\rho_X(1)$, посматране као функција по α , достиже максималну вредност $1/2$ за $\alpha = 1$, а минимум $-1/2$ за $\alpha = -1$. Значи, прва корелација МА процеса првог реда је у интервалу $[-0,5; +0,5]$, као на Слици 4.10 (десно).

На крају истакнимо да за $q = +\infty$ имамо бесконачан покретни просек:

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad (4.26)$$

који краће означавамо са $MA(\infty)$. Већ у наредном одељку показаћемо да се сваки линеарни случајни процес дискретног времена, тј. линеарна временска серија (X_t) може изразити у горенаведеном облику. Штавише, може се показати да ове серије представљају граничне вредности коначних МА модела, када се број сабирака неограничено увећава. Довољан услов за то представља услов тзв. *апсолутне сумабилности* бројевног низа (a_j) , тј. испуњење неједнакости¹⁰:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |a_j| < +\infty.$$

4.5.2.2 Модели ауторегресије (AR модели)

Руководећи се сличним идејама као у случају модела покретних просека, у пракси се често примењује метод разлагања временске серије (X_t) моделом:

$$a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad (4.27)$$

где је $t \in \mathbb{Z}$ и $a_0, a_p \neq 0$. Израз (4.27) назива се *ауторегресивни (AR) модел (реда p)*, а сама једначина којом се дефинише ауторегресивна временска серија назива се *стохастичка диференцијална једначина (реда p)*. Она има важну улогу у карактеризацији самог процеса. Наиме, може се показати да, под одређеним условима, свака ауторегресивна временска серија облика (4.27) може бити приказана претходним МА моделом бесконачног реда. Стога, ако се горе наведеној једначини придружи тзв. карактеристични полином:

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^p a_j \lambda^{p-j},$$

онда важи следећа чињеница:

Теорема 4.5.2. Ако корени $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ карактеристичне једначине $P(\lambda) = 0$ задовољавају услов $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$, онда се ауторегресивни низ (X_t) може написати у облику МА процеса бесконачног реда, тј. има репрезентацију:

¹⁰ Детаљан доказ ове чињенице може се наћи, рецимо, у монографијама (Fuller, 1976) и (Hamilton, 1994).

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \omega_j \varepsilon_{t-j}, \quad (4.28)$$

при чему је низ (ω_j) решење диференчне једначине:

$$a_0 \omega_j + a_1 \omega_{j-1} + \dots + a_p \omega_{j-p} = 0, \quad j \geq p,$$

уз почетне услове:

$$\omega_0 = a_0 \quad \wedge \quad a_0 \omega_j + a_1 \omega_{j-1} + \dots + a_p \omega_{j-p} = 0, \quad j < p.$$

Користећи овај резултат, тј. разлагање ауторегресивне временске серије (4.27) у облику МА серије бесконачног реда (4.28), могу се одредити параметри, математичко очекивање и варијанса низа (X_t) . На исти начин као и код МА модела показује се да важи:

$$E(X_t) = 0, \quad D(X_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \omega_i^2.$$

Са друге стране, аутоковаријациона функција АР серије (4.27) описана је изразом:

$$\gamma_X(h) = E(X_t X_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \omega_j \omega_{j+|h|},$$

тј. представља, за разлику од коваријансе МА модела, монотono опадајућу функцију дискретног аргумента h , која конвергира ка нули.

Слично као у претходној секцији размотрићемо детаљније ауторегресивни модел првог реда, краће АР(1) модел, описан једнакошћу:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

За произвољно $N > 0$ заменом $X_{t-j} = \alpha X_{t-j-1} + \varepsilon_{t-j}$, $j = 1, 2, \dots, N$ у претходној једнакости добићемо:

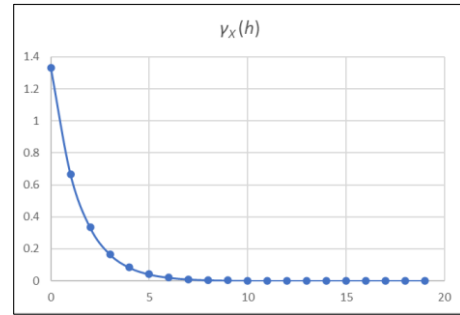
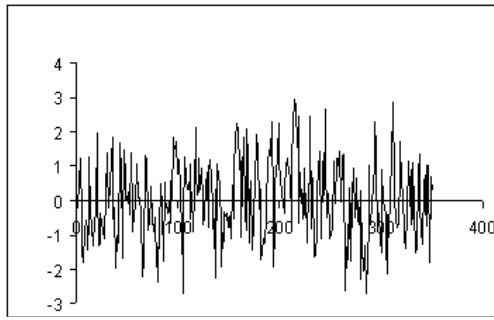
$$X_t = \alpha^N X_{t-N} + \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^j \varepsilon_{t-j}.$$

Ако претпоставимо да је $|\alpha| < 1$, онда у граничном случају, када $N \rightarrow +\infty$, низ (X_t) можемо написати као бесконачан МА процес:

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha^j \varepsilon_{t-j},$$

при чему је:

$$E(X_t) = 0, \quad \gamma_X(h) = E(X_t X_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha^j \alpha^{j+|h|} = \sigma^2 \frac{\alpha^{|h|}}{1 - \alpha^2}.$$



Слика 4.11. Типична реализација (лево) и график корелационе функције (десно) $AR(1)$ процеса:
 $X_t = 0,5 X_{t-1} + \varepsilon_t (\sigma^2 = 1)$

Како је $\gamma_X(0) = \sigma^2 / (1 - \alpha^2)$, то се корелациона функција $AR(1)$ модела добија у облику геометријске прогресије $\rho(h) = \alpha^{|h|}$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ова чињеница представља важну карактеристику AR процеса, јер за разлику од MA модела, њихова корелациона структура је наглашенија, тј. постоји за произвољна два међусобно „удаљена“ засека X_t и X_{t-h} . Као илустрација, на Слици 4.11 приказане су корелациона функција и реализација $AR(1)$ процеса.

4.5.2.3 Комбиновани ($ARMA$) модели

Након разматрања ауторегресивних, односно временских серија покретних просека, на природан начин долазимо до могућности комбиновања ова два модела. Низ (X_t) дефинисан изразом:

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}, \quad (4.29)$$

где је $b_q \neq 0$, назива се *комбинована ($ARMA$) временска серија* реда (p, q) . На сличан начин као и у случају ауторегресивних модела, могуће је и комбиновани $ARMA$ модел приказати у облику временске серије покретних просека бесконачног реда:

Теорема 4.5.3. Нека је временска серија (X_t) дефинисана једнакошћу (4.29), а корени $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ карактеристичне једначине:

$$\lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_p = 0$$

задовољавају услов $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$. Тада је (X_t) стационарна временска серија која се може написати у облику MA процеса бесконачног реда, тј. има репрезентацију:

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j \varepsilon_{t-j},$$

где је низ (v_j) решење диференцне једначине:

$$v_j + a_1 v_{j-1} + \dots + a_p v_{j-p} = \begin{cases} 0, & j > q \\ b_j, & j \leq q \end{cases}$$

са почетним условима:

$$v_0 = 1 \quad \wedge \quad v_j + a_1 v_{j-1} + \dots + a_p v_{j-p-1} = \begin{cases} 0, & j > q \\ b_j, & j \leq q \end{cases}$$

На основу горе наведеног тврђења, можемо одредити основне параметре ARMA(p, q) модела. Математичко очекивање и варијанса, редом, гласе:

$$E(X_t) = 0, \quad D(X_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} v_i^2,$$

док коваријациона функција ARMA временске серије има облик:

$$\gamma_X(h) = E(X_t X_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} v_j v_{j+|h|}.$$

У најједноставнијем случају, ARMA временска серија реда $p = q = 1$ има облик:

$$X_t + a_1 X_{t-1} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1},$$

при чему опет, не умањујући општост, претпостављамо да је $a_0 = b_0 = 1$. Ако ставимо да је:

$$\theta = a_1, \quad U_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$$

онда претходну једнакост, тј. низ (X_t) можемо написати у облику ауторегресивног процеса првог реда:

$$X_t = \theta X_{t-1} + U_t.$$

Одавде, сличним поступком као у претходном одељку, добијамо MA(∞) репрезентацију овог случајног процеса:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j U_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{t-j} + b_1 \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \varepsilon_{t-j-1}.$$

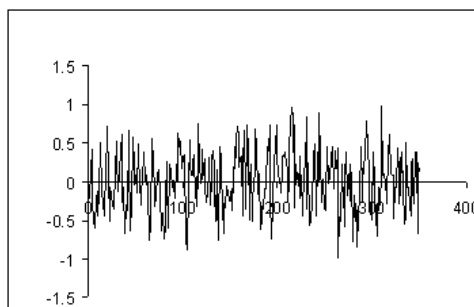
Вредности параметара ARMA(1,1) модела тада гласе:

$$E(X_t) = 0, \quad \gamma(h) = \begin{cases} \frac{1 + b_1^2 + 2b_1\theta}{1 - \theta^2} \sigma^2, & h = 0; \\ \frac{(1 + b_1\theta)(b_1 + \theta)\theta^{h-1}}{1 - \theta^2} \sigma^2, & h = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

па је:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0; \\ \frac{(1 + b_1\theta)(b_1 + \theta)\theta^{h-1}}{1 + b_1^2 + 2b_1\theta}, & h = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Конкретна реализација ARMA(1, 1) временске серије приказана је на слици 4.12.



Слика 4.12. Реализација $ARMA(1,1)$ процеса: $X_t - 0,25X_{t-1} = \varepsilon_t + 0,35\varepsilon_{t-1}$

4.5.3 Нелинеарни (STOPBREAK) модел

Након разматрања линеарних временских серија, на природан начин долазимо до могућности формирања нелинеарних стохастичких модела. Овде ће бити речи о тзв. *стохастичком процесу перманентних флукуација*, популарно названом STOPBREAK¹¹ процес. Овај процес уведен је у фундаменталном раду (Engle & Smith, 1999), док су неке његове модификације разматрале, између осталих, (Huang & Fok, 2001), (Gonzalez, 2004), (Gonzalo & Martinez, 2006) и (Karpetanios & Tzavalis, 2010). Овде ће бити изложена оригинална модификација STOPBREAK процеса, под називом *GSB процес*¹², који је описан у радовима (Стојановић, В. и сар., 2011) и (Стојановић, В. и сар., 2014). Реч је о посебном типу STOPBREAK процеса, који се може посматрати и као његов општи облик (Стојановић, В. и сар., 2015). Такође, GSB процес је већ успешно примењен у анализи нелинеарних временских серија са наглашеним и трајним флукуацијама (Стојановић, В. и сар., 2016).

Основни низ GSB процеса дефинисан је изразом:

$$y_t = m_t + \varepsilon_t, \quad (4.30)$$

где је $t = 0, 1, \dots, T$ низ временских индекса, (m_t) низ тзв. *мартингалних просека*, а (ε_t) бели шум који смо дефинисали у претходном излагању. Додатно, претпоставимо да је, за свако $t = 1, \dots, T$:

$$E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad D(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2,$$

где је $F = (\mathcal{F}_t)$ тзв. *филтрација (филтер) поља догађаја* \mathcal{F}_t , у односу на коју важи мерљивост чланова временске серије (ε_t) . С друге стране, за мартингалне просеке (m_t) претпостављамо да су дефинисани следећом рекурентном релацијом:

$$m_t = m_{t-1} + q_{t-1} \varepsilon_{t-1} = m_0 + \sum_{j=1}^{t-1} q_j \varepsilon_j. \quad (4.31)$$

¹¹ Назив овог процеса добијен је скраћивањем његовог потпуног, изворног назива *Stochastic Permanent BREAKing Process*.

¹² Реч је о скраћеници енглеског термина: *Gaussian Split-Break Process*.

Овде је q_t тзв. *индикатор шума*, тј. случајна величина која зависи од реализација шума (ε_t):

$$q_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 > c) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-1}^2 > c \\ 0, & \varepsilon_{t-1}^2 \leq c. \end{cases}$$

Вредност $c > 0$ представља *критичну вредност реакције*, тј. ниво реализације шума које су статистички значајне да би се њихове вредности укључиле у (4.31). Тако ниво претходних реализација шума (ε_t) утиче на степен варијација низа (y_t), тј. указује на степен интензитета флукуација GSB процеса. Из претходних једнакости даље следи:

$$E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = m_t + E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = m_t,$$

одакле закључујемо да су реализације низа (y_t) „блиске“ низу просека (m_t). Такође важи:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E(m_t) = E(m_{t-1}) + E(q_{t-1}\varepsilon_{t-1}) \\ &= E(m_{t-1}) \\ &\vdots \\ &= E(m_0) = \mu \text{ (const.)}, \end{aligned}$$

тј. средње вредности низова (y_t) и (m_t) имају једнаке, константне вредности.

Даље, условну дисперзију случајног процеса (y_t) одређујемо из једнакости:

$$D(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - m_t^2 = E(m_t^2) + 2m_t E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) - \mu^2 = \sigma^2,$$

одакле имамо да је:

$$\begin{aligned} D(y_t) &= E(y_t^2) - \mu^2 = E(m_t^2) + 2E(m_t \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) - \mu^2 \\ &= D(m_t) + \sigma^2. \end{aligned}$$

Како је, за $t = 1, \dots, T$:

$$\begin{aligned} D(m_t) &= E(m_t^2) - \mu^2 \\ &= E(m_{t-1}^2) + 2E(m_{t-1}q_{t-1}\varepsilon_{t-1}) + E(q_{t-1}^2\varepsilon_{t-1}^2) - \mu^2 \\ &= D(m_{t-1}) + a_c\sigma^2, \end{aligned}$$

где је $a_c = E(q_t) = P\{\varepsilon_t^2 > c\}$, то следи да дисперзију мартингалних просека (m_t), под претпоставком $m_0 \equiv \text{const}$, можемо изразити на следећи начин:

$$D(m_t) = ta_c\sigma^2, \quad t \geq 0.$$

Одавде се применом претходних једнакости добија дисперзија основног низа (y_t):

$$D(y_t) = D(m_t) + \sigma^2 = (ta_c + 1)\sigma^2, \quad t \geq 0.$$

Уочимо да претходне једнакости доста говоре о стохастичкој природи GSB процеса, односно адитивном разлагању (4.30) низа (y_t). Како је низ (m_t) мерљив у односу на поље \mathcal{F}_{t-1} , он представља *компоненту предвидљивости и стабилности* самог процеса. С друге стране, низ (ε_t) јесте *фактор одступања* GSB процеса у односу на вредности низа (m_t).

Најзад, јасно је да дисперзије низова (y_t) и (m_t) имају неконстантне вредности које зависе од временског тренутка t у коме се оне посматрају.

На сличан начин добијају се и корелационе функције ових низова. Приметимо да за свако $s > t \geq 0$ важи:

$$\begin{aligned} Cov(m_t, m_s) &= E(m_t m_s) - \mu^2 = E(m_t m_{s-1}) + E(m_t q_{s-1} \varepsilon_{s-1}) - \mu^2 \\ &= Cov(m_t, m_{s-1}), \end{aligned}$$

па је лако уочити да је коваријанса низа (m_t) :

$$Cov(m_t, m_s) = D(m_t), \quad s > t \geq 0.$$

Одавде се добија корелациона функција мартингалних просека:

$$\tilde{K}(s, t) = \frac{Cov(m_t, m_s)}{\sqrt{D(m_t)} \cdot \sqrt{D(m_s)}} = \begin{cases} \frac{\min(s, t)}{\sqrt{s \cdot t}}, & s \neq t \\ 1, & s = t. \end{cases}$$

На сличан начин, из једнакости:

$$\begin{aligned} Cov(y_t, y_s) &= E(y_t y_s) - \mu^2 = E(y_t m_s) + E(y_t \varepsilon_s) - \mu^2 \\ &= E(m_t m_s) + E(\varepsilon_t m_s) - \mu^2 = Cov(m_t, m_s) + a_c \sigma^2 \\ &= D(m_t) + a_c \sigma^2 = D(y_t) \\ &= (ta_c + 1) \sigma^2, \quad s > t \geq 0, \end{aligned}$$

корелациона функција за (y_t) , добијена стандардним израчунавањем, гласи:

$$K(s, t) = \begin{cases} \frac{a_c \min(s, t) + 1}{\sqrt{(a_c s + 1) \cdot (a_c t + 1)}}, & s \neq t \\ 1, & s = t. \end{cases}$$

Дакле, обе корелационе функције зависе од временских аргумената t, s и указују на *нестационарност* низова (y_t) и (m_t) , што додатно отежава испитивање њихових особина.

На крају овог одељка дефинишимо и низ прираштаја GSB процеса једнакошћу:

$$X_t = y_t - y_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.32)$$

Важност низа (X_t) истакнута је од стране готово свих аутора који су изучавали STOPBREAK процесе, и то са разлогом. Овај низ, као што се лако може уочити из једнакости (4.30) и (4.31), може се задати у облику:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_{t-1} \varepsilon_{t-1}, \quad (4.33)$$

где је $\theta_t = 1 - q_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$, а (ε_t) бели шум који смо дефинисали раније. Низ (X_t) зваћемо *праговни покретни просек* (реда 1), односно *Split-MA(1) процес*. Он делује, дакле, у двоструком режиму. Уколико су флукуације шума у ранијем временском тренутку наглашене, важи једнакост $X_t = \varepsilon_t$, тј. прираштаји GSB процеса су једнаки самом шуму. С друге стране, флукуације шума које не прелазе критичну вредност реакције c дају

репрезентацију низа (X_t) у облику стандардног, линеарног MA(1) модела, који је описан у претходном излагању. На тај начин, низ (X_t) поседује сличне особине као и MA(1) модел, па се многи од већ раније показаних резултата могу применити у његовом истраживању. Тако се, при ранијим претпоставкама, једноставним израчунавањем добијају средња вредност и дисперзија овог низа:

$$E(X_t) = 0, \quad D(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2(b_c + 1),$$

где је $b_c = 1 - a_c = P(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$. Такође, коваријанса овог низа је:

$$Cov(X_s, X_t) = \begin{cases} \sigma^2(b_c + 1), & s = t \\ -b_c \sigma^2, & |s - t| = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

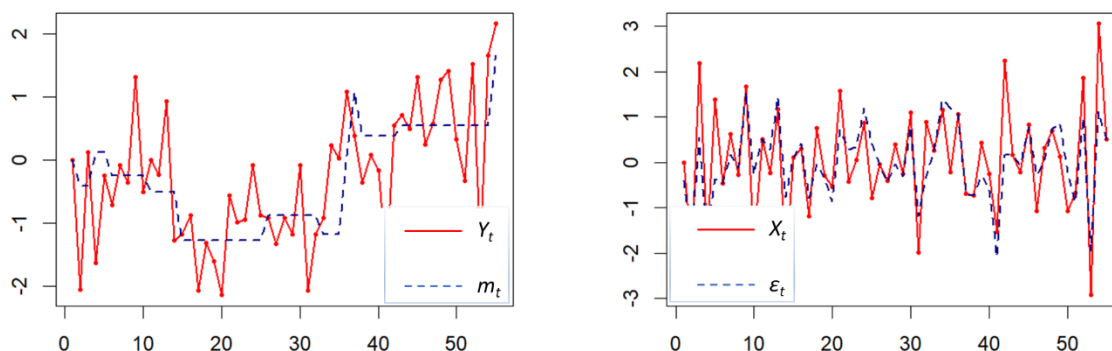
и очито поседује идентичну структуру као код стандардних MA(1) серија. На основу добијене коваријансе лако уочавамо да важи стационарност низа (X_t), као и да његову корелациону функцију можемо написати у облику:

$$\rho(h) = Corr(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ -b_c/(b_c + 1), & h = \pm 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Најзад, из једнакости (4.32) и (4.33) следи једнакост:

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.34)$$

Репрезентација (4.34) се може посматрати као специфични, тзв. *нелинеарни интегрисани ARMA модел* са „привременим” компонентама ($\theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}$), које имплицирају специфичну структуру GSB процеса. У наредном поглављу, као што смо већ истакли, биће речи, поред осталог, и о примени GSB модела у описивању динамике имунизације становништва на територији Републике Србије. Притом, Split-MA(1) процес, због своје стационарности, има веома важну улогу. Као илустрацију, на слици 4.13 приказане су реализације свих временских серија добијених Монте Карло симулацијом GSB модела.



Слика 4.13. Графички приказ реализација основних серија GSB процеса.

5 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ИСТРАЖИВАЊА – СТУДИЈЕ СЛУЧАЈА

У овом поглављу биће изложена експериментална истраживања, као и одговарајући резултати добијени детаљном стохастичком анализом опсервираних података, односно математичким моделирањем расположивих података у процесу одлучивања. Додатно, примењени су и неки методи динамичке и статистичке анализе ради разумевања дугорочне тенденције понашања вируса SARS-COV2 у нашој земљи, као и процеса имунизације, који даје основу за даљи развој успешних метода превазилажења пандемије (Alqahtani, Musa, & Yusuf, 2022; Queirós-Reis, L. i sarad., 2021). Како су мобилни телефони постали саставни део свакодневног човековог живота, њихова примена у различитим областима постала је незаобилазни чинилац, чак и у безбедности самих корисника. Колико је употреба мобилне апликације важна са становишта здравља људи, може се видети кроз њену могућу примену у борби против пандемије болести COVID-19. Стога ће последњи део овог поглавља бити посвећен управо развоју мобилне платформе за повећање безбедности налога корисника еУправе. Прецизније речено, примена раније наведених математичких, стохастичких и безбедносних модела, како кроз анализу и процену, тако и кроз давање препорука за њихово коришћење, овде је приказана кроз следеће четири спроведене студије случаја:

1. студија случаја примене модела регресионе и корелационе анализе;
2. студија случаја примене модела стохастичке и динамичке анализе;
3. студија случаја примене модела вишекритеријумског одлучивања;
4. студија случаја примене мобилне платформе за повећање безбедности.

5.1 ПРИМЕНЕ МОДЕЛА РЕГРЕСИОНЕ И КОРЕЛАЦИОНЕ АНАЛИЗЕ НАД ПОДАЦИМА У СЕРВИСУ COVID-19

Као што смо већ истакли раније, основни задатак примене статистичке анализе јесте проналажење и примена најприкладнијих статистичких метода како би се остварила дубља аналитичка сазнања о законитостима, правилностима, тенденцијама, односима, везама и другим карактеристикама аналитички посматраних масовних појава. При анализи одређених појава које су приказане реализацијама обележја, односно одређених врста статистичких серија (низова података), користе се различити методи статистичке анализе. Сви ови методи се могу у основи поделити на следеће три основне групе: методи статичке анализе, методи регресионе и корелационе анализе, односно методи динамичке анализе. Као што је већ речено, један од циљева овог поглавља јесте да на основу претходно изложених теоријских аспеката стохастичког моделовања укаже на одређене статистичке

законитости које се јављају у, сада већ слободно можемо рећи, перманентном сукобу човечанства са једном од својих највећих пошаста, тј. вирусом SARS-COV2. Стога ће овде бити анализирана сва три горе наведена аспекта статистичког моделовања, који ће бити примењени на различите врсте реалних података.

Најпре ће бити речи о студији случаја примене **метода регресионе и корелационе анализе**, које истражују и аналитички испитују везе и утицај између различитих појава (обележја), односно међусобно повезаних скупова података. То се, наравно, пре свега односи на већ добро познате, укупне нумеричке показатеље болести изазване овим вирусом: број оболелих, односно преминулих лица, проценат заражавања, са једне, односно броја вакцинисаног становништва, са друге стране, итд. Основни извор података јесте, као што смо већ истакли, Портал еУправа Републике Србије, као и Институт за јавно здравље Србије „Др Милан Јовановић Батут“. Дакле, подаци прикупљени за потребе израде ове дисертације представљају обједињени извор свих релевантних података који се односе на динамику ове болести. На тај начин они ће бити резултат прецизне, веродостојне и темељне опсервације која се, пре свега, односи на територију Републике Србије.

5.1.1 Основни појмови и принципи регресионе анализе

Термин „регресија“ први пут уведе енглески научници Френсис Галтон¹³ и Карл Пирсон¹⁴ приликом изучавања наследних особина. Регресиона анализа данас има знатно шире значење. Њоме се, пре свега, открива неки облик функционалне зависности између два (или више) обележја (променљиве, варијабле). Дакле, са савременог становишта, регресиона анализа представља статистичку методу чија је сврха да на основу једне променљиве или више променљивих које су познате може да предвиди друге, непознате вредности променљивих. Основни предуслов за то да јесте да постоје зависности између посматраних променљивих. Регресиона анализа тада има за задатак да открије законитости и правилности у односима између статистичких појава, као и да креира математичке моделе који описују одређене појаве у стварним условима.

¹³ Френсис Галтон (енгл. *Francis Galton*, 1822–1911) енглески статистичар, психолог, антрополог и генетичар. Међу првима је применио прецизне статистичке методе у циљу проучавања људских наследних особина, али и разлика у наслеђивању. Сматра се да је први увео анкете и упитнике за прикупљање података које је користио у својим истраживањима.

¹⁴ Карл Пирсон (енгл. *Karl (Carl) Pearson*, 1857–1936) енглески математичар, статистичар, биолог и филозоф. Оснивач математичке статистике и један од оснивача биометрије. Аутор је преко 650 објављених научних радова. Развио је теорију корелације, алгоритма доношења одлука (тестирања) и оцене параметара.

Превасходни проблем у квантитативном описивању регресионе зависности јесте избор одговарајућег модела, као и променљивих које су битне за њихово описивање и повезивање у облику математичке релације. Када се дефинишу тзв. зависне и независне променљиве, тада се користи регресиони модел који, у општем облику, можемо написати у облику функције више променљивих:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m) + \varepsilon. \quad (5.1)$$

Ова функција, коју обично називамо *функција регресије* или *регресиона функција*, повезује зависну променљиву Y са једном или више независних (контролисаних) променљивих X_j ($j = 1, 2, \dots, k$). Притом, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ су тзв. *параметри модела* који се одређују на основу емпиријских података, док је ε *стандардна грешка оцене регресије*. Реч је о случајној променљивој која представља одступања регресионог модела од стварних, емпиријских података.

Избор математичког модела при анализи емпиријских података се врши након њихових прикупљања. Као основне задатке регресионог модела можемо навести:

- а. оцењивање параметара ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$) одређеним статистичким поступцима;
- б. тестирање релације (5.1) са добијеним оцењеним вредностима параметара у односу на реалне податке, чиме се доприноси разумевању појаве која је предмет посматрања.

Истакнимо да у теорији регресионе анализе постоји више врста веза: праволинијске (линеарне), криволинијске (нелинеарне) и просторне (вишеструке). Основни циљ регресионе анализе јесте да се утврди степен, тј. јачина регресионе везе, као и њен облик. Јачина регресионих веза се одређује анализирањем конкретног случаја регресионог модела, док је облик дефинисан обликом функције која представља детерминистички део регресионог модела. У првој фази регресионе анализе најчешће се прикупљени подаци приказују графички у облику тзв. *дијаграма распрострањености*. Његов задатак је да визуелно прикаже облик функционалне зависности (уколико постоји) унутар опсервираних података. На Слици 5.1 приказани су неки карактеристични случајеви регресионе зависности.



Слика 5.1. Различити функционални облици регресионе зависности

5.1.2 Метод најмањих квадрата

Размотримо најпре случај када је обележје Y , као зависна променљива, функција једне независне променљиве X . Притом, као један од типичних, општијих облика регресионе зависности посматрамо најпре *полиномни облик*¹⁵ регресионе функције:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \beta_m X^m + \varepsilon \quad (5.2)$$

Да би се оваква функционална зависност сматрала адекватном и оправданом, потребно је уочити тзв. *скуп емпиријских података*, тј. вредности $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ које представљају реализације обележја (X, Y) . На основу релације (5.2) за дате емпиријске вредности тада апроксимативно важи:

$$y_i \approx \beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \beta_m x_i^m \quad (5.3)$$

Основни циљ регресије јесте да се што прецизније утврди природа везе између опсервираних вредности варијабли X и Y помоћу регресионог модела (5.2). Од свих метода које могу користити за оцену параметара регресионих модела типа најчешће се користи **метод најмањих квадрата**. У ту сврху, за свако $i = 1, 2, \dots, N$ означимо тзв. оцењене вредности променљиве (обележја) Y на основу датог регресионог модела, тј. вредности:

$$\hat{y}_i = f(x_i; b_0, b_1, \dots, b_m) = b_0 + b_1 x_i + \dots + b_m x_i^m,$$

при чему су величине b_0, b_1, \dots, b_m оцене параметара $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$, респективно. Сам метод најмањих квадрата се састоји у минимизацији суме квадрата одступања емпиријских и оцењених вредности за Y , тзв. *резидуала* $e_i = y_i - \hat{y}_i$, који означавају оцену случајних одступања ε , односно разлику између стварне вредности y_i променљиве Y и вредности \hat{y}_i оцењене регресијом. Тако се добија **циљна функција**:

$$Q(b_0, b_1, \dots, b_m) = \sum_{i=0}^N e_i^2 = \sum_{i=0}^N (y_i - b_0 - b_1 x_i - \dots - b_m x_i^m)^2 \quad (5.4)$$

за коју треба наћи *оптималне вредности* b_0, b_1, \dots, b_m тако да се оствари њен минимум:

$$Q(b_0, b_1, \dots, b_m) = \min_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m} Q(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$$

Минимизација суме квадрата (5.4) по непознатим параметрима регресионог модела b_0, b_1, \dots, b_m врши се изједначавањем одговарајућих парцијалних извода циљне функције са нулом, односно решавањем система једначина:

¹⁵ Овде примењујемо неке од познатих чињеница математичке и нумеричке анализе (тј. познату Вајерштрасову теорему) да се сваки емпиријски скуп података може „добро“ апроксимирати полиномом довољно великог степена.

$$\frac{\partial Q(b_0, b_1, \dots, b_m)}{\partial b_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (5.5)$$

Заменом израза за циљну функцију (5.4) у претходну једнакост (5.5) добија се следећи, тзв. *нормални систем линеарних једначина* (по непознатама b_0, b_1, \dots, b_m):

$$\begin{aligned} Nb_0 + b_1 \sum_{i=0}^N x_i + \dots + b_m \sum_{i=0}^N x_i^m &= \sum_{i=0}^N y_i \\ b_0 \sum_{i=0}^N x_i + b_1 \sum_{i=0}^N x_i^2 + \dots + b_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^N x_i y_i \\ &\vdots \\ b_0 \sum_{i=0}^N x_i^m + b_1 \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} + \dots + b_m \sum_{i=0}^N x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^N x_i^m y_i. \end{aligned}$$

Овај систем се може приказати и у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=0}^N x_i & \dots & \sum_{i=0}^N x_i^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^N x_i^m & \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=0}^N x_i^{2m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N y_i \\ \sum_{i=0}^N x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N x_i^m y_i \end{pmatrix},$$

који се затим релативно једноставно решава директним поступком (тј. помоћу инверзне матрице система) или неким од стандардних нумеричких метода, које се такође могу и софтверски имплементирати на рачунару¹⁶. Овде треба истаћи и то да се као показатељ квалитета добијеног регресионог модела уобичајено користи тзв. **коэффициент детерминације**:

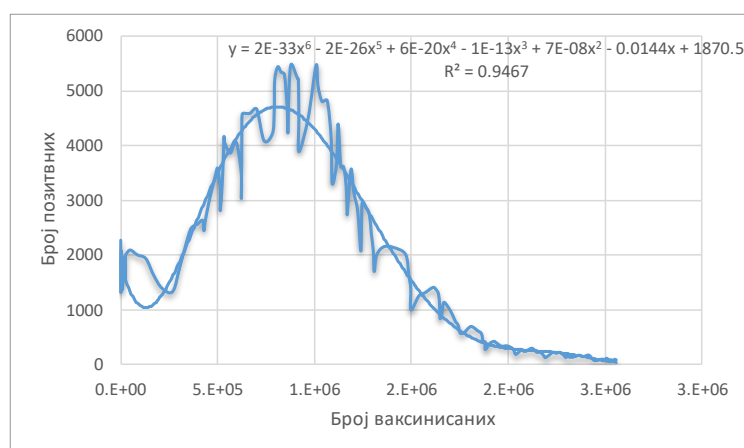
$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

где је $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n$ аритметичка средина опсервација обележја Y . На основу дефиниције коэффицијента детерминације види се да он представља пропорцију варијација зависне променљиве Y које су објашњене одговарајућим регресионим моделом у односу на укупне

¹⁶ Један од типичних поступака нумеричког решавања система линеарних једначина јесте тзв. *Грам-Шмитов метод ортогонализације* елемената основне матрице система, која се тада своди на дијагоналну матрицу. (За више детаља видети: (Миловановић Г., 1984).)

варијације ове променљиве. Из друге једнакости¹⁷ лако се закључује да је минимална вредност коефицијента детерминације једнака 0, а максимална 1, односно да се он се креће у границама: $0 \leq r^2 \leq 1$. Тако он представља релативну меру прилагођености линије регресије емпиријским подацима, односно степен објашњеног варијабилитета у одговарајућем регресионом моделу.

Као пример за примену општег модела полиномне регресије описаћемо зависност која се односи на податке еУправе Републике Србије о укупном броју вакцинисаних грађана (независна варијабла X) у односу на број пацијената позитивних на вирус COVID-19 (зависна варијабла Y). Основна идеја аутора ове дисертације јесте да се упоређивањем вредности ове две варијабле, првенствено у временском периоду када званично почиње процес вакцинације у Републици Србији, формира адекватан и прецизан модел међузависности посматраних варијабли, те да се на основу тога укаже на неопходност наставка тренда повећања броја вакцинисаних грађана, а ради смањења броја нивоа инфицираног становништва.



Слика 5.2. Полиномијални регресиони модел зависности броја инфицираног у односу на број вакцинисаног становништва (период 14.1 – 29.6.2021)

Притом су обе емпиријске серије, на основу опсервираних вредности у посматраном временском периоду, дате и помоћу тзв. *дијаграма распршености* на Слици 5.2. Упоредо са подацима приказана је и апроксимација њихове међузависности одговарајућим полиномним регресионим моделом. Као што се може уочити, због релативно сложене функционалне зависности датих варијабли као релативно адекватан регресиони модел коришћен је полином шестог степена. Приметимо да је применом овог полинома као регресионог модела добијено веома високо слагање емпиријских и оцењених, односно „фитованих“ података. О томе, између осталог, сведочи и веома висока оцењена вредност коефицијента детерминације, која износи 94,67%.

¹⁷ Детаљан доказ ове једнакости може се наћи, рецимо, у (Стојановић, В., 2022).

5.1.3 Линеарни и експоненцијални регресиони модел

Најједноставнији случај регресионе везе даје линеарна зависност посматраних обележја, која се приближно покорава праволинијском закону. Овај модел је одређен линеарном функцијом:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x, \quad (5.5)$$

где величине b_0 , b_1 означавају оцене параметара β_0 и β_1 респективно добијене методом најмањих квадрата, односно минимизацијом суме квадрата (5.4), за $m = 1$. У овом случају сума квадрата (5.4) има следећи облик:

$$Q = \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1x_i)^2,$$

па се изједначавањем одговарајућих парцијалних извода са 0 добија систем нормалних једначина:

$$\begin{aligned} Nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N x_i y_i. \end{aligned}$$

Решавањем овог система се добијају оцене за b_0 и b_1 :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2}, \\ b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i - b_1 \sum_{i=1}^N x_i}{N} = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \end{aligned}$$

Приметимо да се код израза за оцењивање коефицијента b_0 користи прва једначина нормалног система, па се алтернативна формула за његово израчунавање добија применом формула за израчунавање аритметичких средина:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i.$$

Са практичног становишта, линеарни регресиони модели због своје једноставности имају врло важну улогу. С друге стране, примена нелинеарних регресионих модела итекако је од интереса у прецизнијем описивању неких сложенијих међузависности између посматраних појава. Један од начина за „помирење“ ова два захтева јесте одабрати нелинеарни регресиони модел које се може линеаризовати, тј. погодним математичким поступцима трансформисати на линеарни модел. Један од таквих типичних нелинеарних модела јесте експоненцијални регресиони модел, представљен општом формулом:

$$\hat{y} = b_0 e^{b_1 x}. \quad (5.6)$$

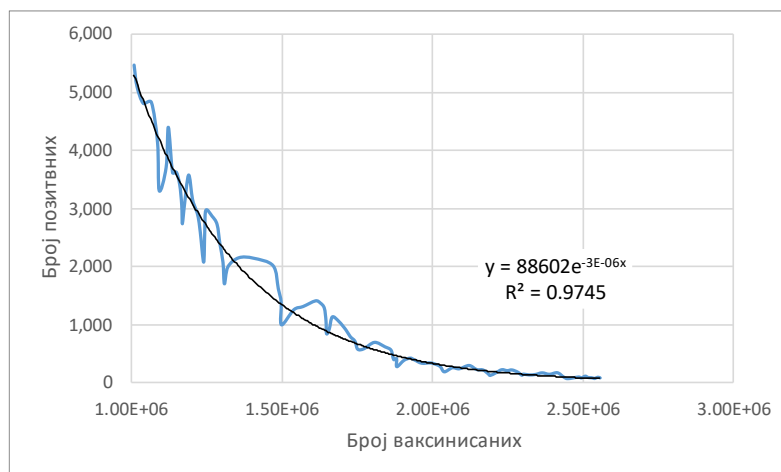
Ако једнакост (5.6) логаритмујемо, добићемо релацију:

$$\ln \hat{y} = \ln b_0 + b_1 x,$$

одакле се заменом $y^* = \ln y$ и $b_0^* = \ln b_0$ добија линеарни регресиони модел:

$$y^* = b_0^* + b_1 x. \quad (5.7)$$

За модел (5.7) се претходно описаним поступком, тј. применом метода најмањих квадрата у случају линеарних регресионих модела облика (5.5), лако одређују одговарајући параметри b_0^* , b_1 . Као илустрација примене експоненцијалне регресионе функције (5.6) у моделовању реалних података на Слици 5.3 приказана је зависност броја инфицираног становништва посматрана у односу на број вакцинисаних у временском периоду од марта до краја јуна 2021. године. Као што се може уочити, у овом периоду долази до изразитог, експоненцијалног опадања броја инфицираних у односу на број вакцинисаних лица. Стога се овде као адекватан теоријски модел може користити експоненцијална регресиона функција (5.6). Потврду томе даје и висока вредност коефицијента детерминације, који указује на то да је чак 97,45% укупног варијабилитета објашњено овим моделом.

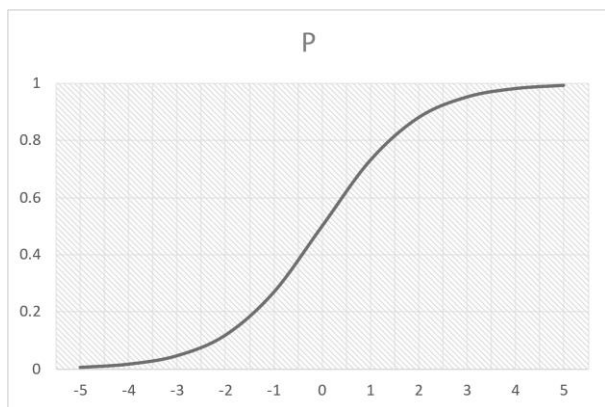


Слика 5.3. Експоненцијални регресиони модел зависности броја инфицираног становништва у односу на број вакцинисаних (период од 30. 3 – 29. 6. 2021)

5.1.4 Логистички регресиони модели

Како је већ истакнуто у секцији 5.1.2, у решавању емпиријских проблема различите природе апроксимација се најчешће остварује полиномима већег степена. Ипак, у неким ситуацијама чак и таква, на изглед квалитетна апроксимација може бити неадекватна у практичном смислу. У таквим ситуацијама се најчешће користи *логистичка регресија* која представља посебну врсту регресионог модела, који је најпре формиран и примењен у теорији вероватноће. У овом облику логистички регресиони модели обично представљају стохастичке моделе који описују зависност тзв. бинарних (дихотомних) случајних променљивих, тј. величина које могу имати само два могућа исхода („да/не“, „1/0“ или „успех/неуспех“). Основни облик логистичке регресије се тада заснива на описивању функционалне зависности тзв. *пропорције (удела)* позитивних одговора (P) на одређеном

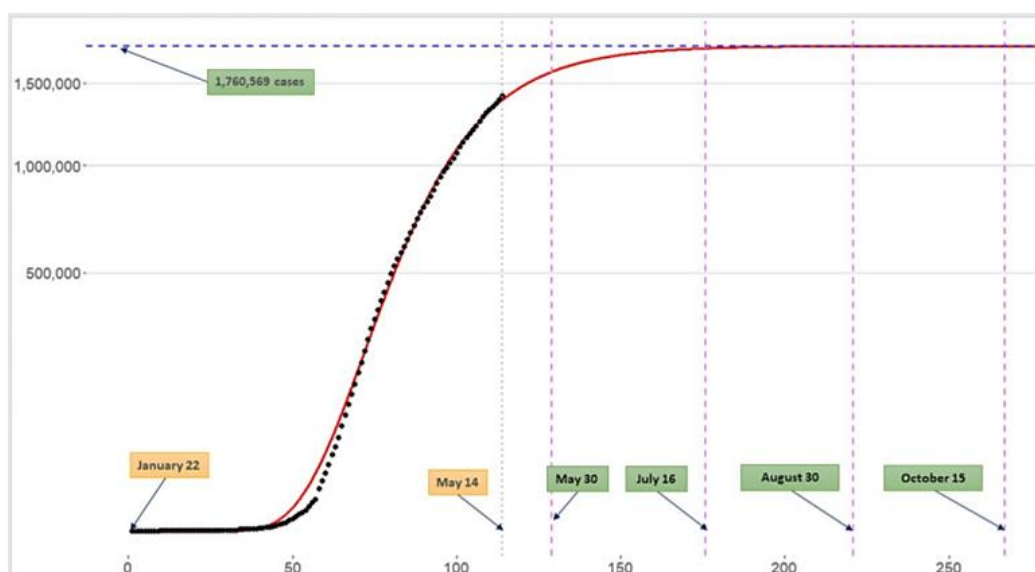
узорку и представља се помоћу тзв. *логистичке (S) криве*, чији је график приказан на Слици 5.4. У овом случају логистичке функције представљају регресионе моделе који описују вероватноће удела позитивних одговора, па се њихова вредност налази унутар јединичног интервала (0,1).



Слика 5.4. График логистичке (S) функције

Генерализована логистичка (ГЛ) функција, такође позната и као *Ричардсова крива* (Richards, 1959), представља, као што и сам њен назив казује, уопштење претходних логистичких функција. Овај регресиони модел садржи широк спектар различитих функција које налазе примену у бројним примењеним дисциплинама: медицинским и друштвеним наукама, обради анкета, маркетиншким

истраживањима итд. ГЛ функција се такође широко користи у моделирању броја становништва инфицираног болешћу COVID-19 (Lee & Mallick, 2020; Almeshal, Almazrouee, Alenizi, & Alhajeri, 2020).



Слика 5.5. Примена ГЛ функција у моделовању и предикцији укупног броја случајева инфекције вирусом SARS-CoV2 (Извор: (Lee & Mallick, 2020))

Као илустрација, на Слици 5.5 приказана је предикција (прогноза) укупног броја инфицираног становништва на територији Сједињених Америчких Држава током 2020 године. Приметимо да трајекторије инфекције представљају дневни временски низ података за кумулативни број инфицираних случајева над одређеним географским

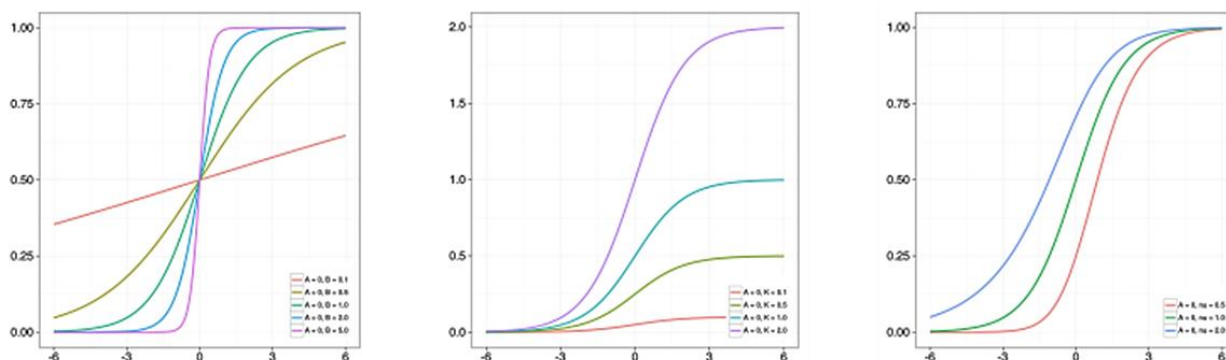
субјектом (градом, државом итд.). У општем случају најчешће се користи следећи облик ГЛ функције:

$$Y(x) = A + \frac{K - A}{(1 + \xi \exp(-ax))^{1/v}}, \quad (5.8)$$

где се појављује неколико параметара:

- о A је доња (лева) асимптота функције (када $x \rightarrow -\infty$);
- о K је горња (десна) асимптота функције (када $x \rightarrow +\infty$);
- о a и v су параметри брзине раста ГЛ функције;
- о ξ је параметар „померања“, повезан са вредношћу $Y(0) = L + \frac{K-L}{(1+\xi)^{1/v}}$.

Посебна предност ГЛ логистичке криве (5.8) јесте њена способност да за различите вредности горе наведених параметара може представљати различите облике процеса раста, на начин приказан на Слици 5.6. Тако се ГЛ функције одликују великом флексибилношћу, пре свега због параметра v , који уз параметар a одређује брзину раста ГЛ функције. Стога он представља предмет сталног проучавања, односно модификације и стварања нових ГЛ модела (Wang, Liu, & Huang, 2016; Cao, Shi, Li, & Chen, 2019).



Слика 5.6. Графички приказ ГЛ функција за различите вредности параметара (Извор: (Wikipedia, n.d.))

Ипак, у практичној примени ГЛ модела доста компликован проблем представља налажење прецизне оцене за параметар раста v (Tsoularis & Wallace, 2002). Стога је често неопходно разматрати неке посебне случајеве ових регресионих модела. Посебно је интересантна ситуација код епидемиолошких модела који, као што је већ речено, описују кумулативни раст броја инфицираног становништва. Тада се природно узима да је вредност параметра $A = 0$, јер пре настанка инфекције није било заражених лица. Још једна од претпоставки јесте да важи $\xi \approx v \cdot e^{-b}$, при чему вредности ξ, v конвергирају ка нули, тј.

$$(1 + \xi \exp(-ax))^{-\frac{1}{v}} \rightarrow \exp(-e^{-(ax+b)}).$$

На тај начин настаје тзв. *Гомперцова*¹⁸ *логистичка крива*:

$$Y(x) = K \cdot \exp(e^{-(ax+b)}), \quad (5.9)$$

односно сигмоидна, логистичка функција која раст неке појаве описује као *најспорији на самом почетку, као и на самом крају датог временског периода*.

Наиме, како је $a > 0$, очито је да су лева и десна асимптота ове функције респективно:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = K.$$

То практично значи да у одговарајућем епидемиолошком моделу параметар K представља будућу, крајњу прогнозирану вредност дате појаве. Притом, Гомперцова функција постепено и знатно спорије конвергира ка параметру B него левој асимптоти као почетној, нултој вредности. Ово представља суштинску разлику, али и предност у односу на Ричардсову логистичку функцију која се обема асимптотама приближава симетрично.

Описаћемо сада примену Гомперцове логистичке (ГЛ)¹⁹ криве у моделовању и прогнози укупног броја вакцинисаног становништва Републике Србије у периоду од 24. 12. 2020. (почетак вакцинације) до 6. 6. 2022. године. Подсетимо се да су подаци о имунизацији добијени са Портала еУправа Републике Србије, као и да су њихови основни статистички показатељи већ приказани у претходном делу овог рада (Табела 3.3). Ради конструкције ГЛ функције као основног математичког модела имунизације биће коришћен алгоритамски поступак сличан оном описаном у (Кевкић, Стојановић, & Јоксимовић, 2017) и (Кевкић, Стојановић, & Јоксимовић, 2018). Стога приметимо да се након логаритмовања ГЛ функције (5.9) добија следећи низ једнакости:

$$\ln Y = \ln K + e^{-(ax+b)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{Y}{K}\right) = e^{-(ax+b)},$$

односно:

$$\ln\left[\ln\left(\frac{Y}{K}\right)\right]^{-1} = ax + b. \quad (5.10)$$

Израз на левој страни једнакости (5.10), слично као код експоненцијалног регресионог модела, можемо посматрати као нову променљиву:

¹⁸ Ова функција названа је по Бењамину Гомперцу (1779–1865), енглеском статистичару и члану Британског краљевског друштва. Први пут је представљена 1825. године и већ тада успешно синтетизовала велике колекције табеларно приказаних података.

¹⁹ Сматрајући да не умањујемо општост означавања у односу претходне, генерализоване логистичке функције, Гомперцову логистичку функцију ћемо такође краће означавати као *ГЛ функцију*.

$$Y^* := GL(Y) = \ln \left[\ln \left(\frac{Y}{K} \right) \right]^{-1}.$$

Самим тим, једнакост (5.10) представља једначину линеарног регресионог модела (са зависном променљивом Y^*), па се коефицијенти овог модела a, b једноставно одређују методом најмањих квадрата, који је описан у претходном одељку.

Ипак, овде је од превасходног значаја оцена асимптотске вредности $K > 0$ која, подсетимо се, представља дугорочну прогнозу укупног броја имунизованог становништва. Да би се што је могуће прецизније добила оцењена вредност овог коефицијента, примењен је алгоритамски поступак чија је основна идејна структура следећа:

1. корак: Изабере се почетна („стартна“) вредност параметра $K > 0$. Најприродније је за ову вредност узети максималну кумулативну вредност посматраног низа података, тј. у нашем случају је то укупан број вакцинисаних лица.
2. корак: За изабрану вредност $K > 0$ конструисати, применом метода најмањих квадрата, регресиони модел (5.10). Одредити коефицијент детерминације (r^2) добијеног модела.
3. корак: Изабрати вредност тзв. *корак итерације* (h) и узети да је „нова“ асимптота $K := K + h$. „Вратити“ се затим на 2. корак, тј. конструисати нови регресиони модел, заједно са одговарајућим коефицијентом детерминације.
4. корак: Уколико је вредност „новог“ коефицијента детерминације већа од претходног, поновити 3. корак. У супротном, алгоритам престаје са радом, тј. добијена је асимптотска вредност K за коју одговарајући регресиони модел (5.10) има највећу могућу вредност коефицијента детерминације (r^2).

Применом овог алгоритма, као што се може уочити, сукцесивно се формира читав низ регресионих модела, са различитим асимптотским вредностима $K > 0$. Као најоптималнији ГЛ модел биће изабран управо онај коме одговара највећа вредност коефицијента детерминације. Разлог томе, како је већ објашњено, лежи у чињеници да коефицијент детерминације r^2 представља меру квалитета, односно степен слагања регресионог модела са емпиријским подацима. У нашем случају поступак одређивања асимптоте $K > 0$ приказан је низом итерација у Табели 5.1.

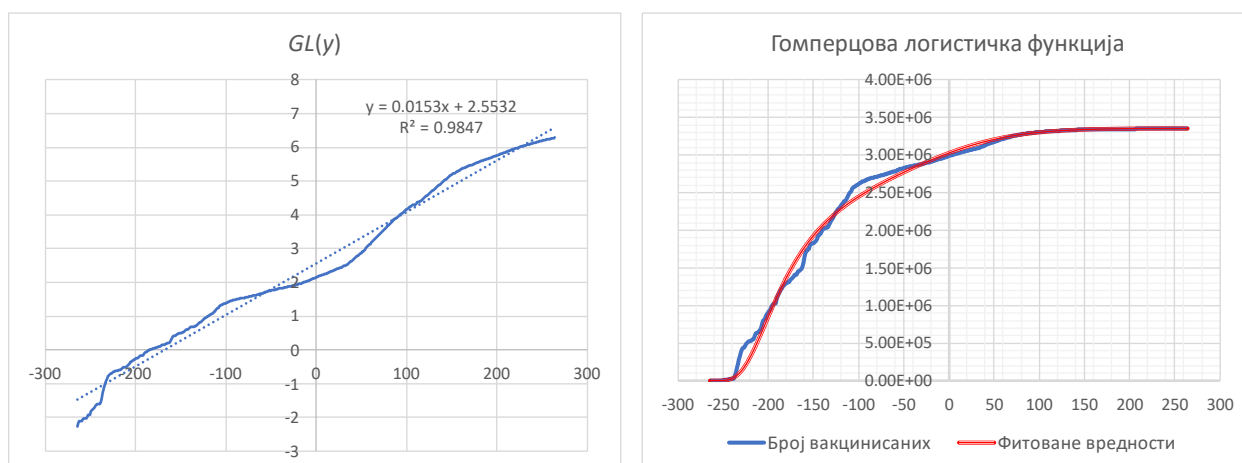
Табела 5.1. Итеративни поступак одређивања горње асимптоте ГЛ функције.

Ред. број	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$K (10^6)$	3,352	3,353	3,354	3,355	3,356	3,357	3,358	3,359	3,360	3,361	3,362	3,363	3,364
r^2	0,9672	0,9782	0,9818	0,9834	0,9843	0,9846	0,9847	0,9846	0,9843	0,984	0,9835	0,9831	0,9825

Овде је за „стартну“ вредност $K_0 = 3,352 \cdot 10^6$ узет (приближан) број укупно вакцинисаног становништва првом дозом вакцине на дан 6. 6. 2022. године. На основу ове вредности се даље проверава оптималност регресионих модела чија је горња асимптота сукцесивно увећана за итеративну вредност $h = 1.000$. Приметимо да је оптимална вредност $K = 3,358 \cdot 10^6$ добијена у шестој итерацији, при чему јој одговара ГЛ регресиони модел:

$$Y^* := GL(Y) = 0,0153x + 2,5532$$

са максималним коефицијентом детерминације $r^2 = 0,9847$. На Слици 5.7 (лево) приказана је апроксимација трансформисаних података (Y^*) овим линеарним моделом. Након тога линеарни регресиони модел (5.10) се „супротним“ поступком једноставно трансформише у ГЛ модел (5.9). На Слици 5.7 (десно) приказан је примена овако формираног модела у прогнози укупног броја имунизованог становништва на територији Републике Србије.



Слика 5.7. Формирање линеарног регресионог модела (слика лево) на основу којег се формира ГЛ модел укупног броја вакцинисаног становништва (слика десно)

5.2 ПРИМЕНА НЕЛИНЕАРНИХ СТОХАСТИЧКИХ МОДЕЛА У АНАЛИЗИ ДИНАМИКЕ И СТЕПЕНА ИМУНИЗАЦИЈЕ

У овом делу, као што и сам његов назив казује, биће описана примена раније уведеног модела нелинеарног GSB процеса у описивању динамике, али и проналажењу адекватне стохастичке расподеле броја имунизованог становништва на територији Републике Србије. Полазећи од рада (Јовановић, Стојановић, Кук, Поповић, & Чисар, 2022), биће најпре разматране неке могућности за одређивање расподеле основних низова GSB процеса, а затим и поступак оцењивања непознатих параметара, критичне вредности (c) и дисперзије (σ^2) овог процеса. У том циљу, главну улогу ће имати стационарни низ прираштаја (X_t) овог процеса, дефинисан једнакостима (4.32) и (4.33). На крају ове студије биће изложена практична примена GSB процеса, тј. поступак стохастичког моделовања

динамике броја вакцинисаних лица, као и неки методи (апроксимативног) одређивања њихове стохастичке расподеле.

5.2.1 Стохастичка расподела GSB процеса

У овом одељку размотрићемо нека стохастичка својства GSB процеса који је описан у одељку 4.5.3. Као што је већ објашњено у том одељку, реч је о релативно сложенем стохастичком моделу, задатог једнакостима (4.30)-(4.33). Основне стохастичке компоненте GSB процеса, поред основног низа (Y_t), чине још две временске серије: низ мартингалних просека (m_t) и низ прираштаја (X_t). Притом, како је већ показано, низ (X_t) представља једину стационарну компоненту GSB процеса која је „блиска“ линеарном моделу покретних просека (МА моделу), о коме је такође било речи раније. У раду (Стојановић, В. и сар., 2016) описана је, у општем облику, стохастичка структура овог низа, при чему је као основни механизам коришћен *метод карактеристичних функција*, које су описане у одељку 4.3.2. Како овде посматрамо најједноставнији случај GSB процеса, односно низ (X_t) који је задат као тзв. Split-МА модел првог реда, основне стохастичке особине овог низа можемо исказати наредним тврђењима.

Теорема 5.2.1. Нека је (X_t) Split-МА(1) процес дефинисан једнакошћу (4.33). Функција расподеле овог случајног процеса дата је са:

$$F_X(x) := P\{X_t < x\} = (1 - b_c)F_\varepsilon(x) + b_c F_{2\varepsilon}(x), \quad (5.11)$$

где су $F_\varepsilon(x)$ и $F_{2\varepsilon}(x)$, респективно, функције расподеле случајних променљивих $\varepsilon_t: \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и $2\varepsilon_t: \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$.

Доказ. За произвољно $t = 1, \dots, T$ означимо низ случајних променљивих $\eta_t = \theta_t \varepsilon_t$. Како су θ_t и ε_t међусобно независне случајне променљиве, то следи:

$$\begin{aligned} E(\eta_t) &= E(\theta_t)E(\varepsilon_t) = 0 \\ D(\eta_t) &= E(\theta_t^2)E(\varepsilon_t^2) = b_c \sigma^2. \end{aligned}$$

Такође, једноставно се показује да за свако $k \neq 0$ важи $Cov(\eta_t, \eta_{t+k}) = 0$, тј. (η_t) јесте низ некорелираних случајних променљивих. Применом условних вероватноћа добија се функција расподеле ових случајних променљивих:

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &:= P\{\eta_t < x\} \\ &= P\{\eta_t < x | \theta_t = 1\} \cdot P\{\theta_t = 1\} + P\{\eta_t < x | \theta_t = 0\} \cdot P\{\theta_t = 0\} \\ &= P\{\varepsilon_t < x\} \cdot P\{\theta_t = 1\} + P\{x > 0\} \cdot P\{\theta_t = 0\} \\ &= b_c F_\varepsilon(x) + (1 - b_c)F_0(x), \end{aligned}$$

где је $F_0(x) = I\{x > 0\}$ функција расподеле случајне променљиве $I_0 \stackrel{si}{=} 0$. Одавде се добија карактеристична функција случајних променљивих η_t :

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(u) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} F_\eta(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} [b_c F_\varepsilon + (1 - b_c) F_0](dx) \\ &= b_c \varphi_\varepsilon(u) + (1 - b_c) \varphi_0(u),\end{aligned}$$

где су $\varphi_\varepsilon(u) = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$ и $\varphi_0(u) = 1$ карактеристичне функције случајних променљивих ε_t и I_0 , респективно. Заменом у претходној једнакости добијамо:

$$\varphi_\eta(u) = 1 + b_c \left(e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} - 1 \right),$$

одакле применом једнакости (4.32) следи да је карактеристична функција за X_t :

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \varphi_\varepsilon(u) \cdot \varphi_\eta(u) = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \left[1 + b_c \left(e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} - 1 \right) \right] \\ &= (1 - b_c) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} + b_c e^{-\sigma^2 u^2}.\end{aligned}$$

На основу последње једнакости и теореме Левија 4.3.8 непосредно следи једнакост (5.11), односно тврђење теореме у целини. ■

Сличним поступком као у претходној теореме, тј. применом метода карактеристичних функција описујемо стохастичку расподелу и осталих компоненти GSB процеса, тј. низова (m_t) и (y_t) . Како је већ показано у одељку 4.5.3, ови низови представљају нестационарне случајне процесе са константном средњом вредношћу $\mu = E(m_t) = E(y_t)$ и притом важи следећа теорема:

Теорема 5.2.2. Нека су (y_t) и (m_t) временске серије дефинисане једнакостима (4.30) и (4.31), при чему је $\mu \stackrel{si}{=} m_0$ (*const*). Тада за произвољно $x \in \mathbb{R}$ и $t = 0, 1, \dots, T$ функције расподеле ових случајних процеса гласе редом:

$$F_m(x, t) := P\{m_t < x\} = \bigotimes_{j=1}^t [(1 - b_c) F_\varepsilon(x) + b_c F_0(x)] \otimes F_\mu(x) \quad (5.12)$$

$$F_y(x, t) := P\{y_t < x\} = \bigotimes_{j=1}^t [(1 - b_c) F_\varepsilon(x) + b_c F_0(x)] \otimes F_\mu(x) \otimes F_\varepsilon(x). \quad (5.13)$$

Овде су $F_0(x)$ и $F_\varepsilon(x)$ раније дефинисане функције расподеле, $F_\mu(x) = F_m(x, 0)$ је функција расподеле за $\mu \stackrel{si}{=} m_0$, док „ \otimes “ означава конволуцију двеју функција расподела $F(x), G(x)$:

$$(F \otimes G)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - y) G(dy).$$

Додатно, у случају $T = +\infty$ важи конвергенција:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_m(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_y(x, t) = F_\delta(x), \quad (5.14)$$

где $F_\delta(x)$ представља функцију расподеле тзв. јединичног импулса, односно случајне променљиве чија се функција густине $\delta(x)$ може се написати као Диракова δ -функција²⁰:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x z} dz = \begin{cases} +\infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Доказ. За произвољно $t = 1, \dots, T$ уочимо низ случајних променљивих $\xi_t = q_t \varepsilon_t$. На потпуно исти начин као у доказу претходне теореме показује се да је (ξ_t) низ међусобно некорелираних случајних променљивих, са параметрима $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = a_c \sigma^2$, при чему је $a_c = E(q_t) = P\{\varepsilon_t^2 > c\} = 1 - b_c$. Поновном применом условних вероватноћа добија се функција расподеле случајних променљивих ξ_t :

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &:= P\{\xi_t < x\} = P\{\xi_t < x | q_t = 1\} \cdot P\{q_t = 1\} + P\{\xi_t < x | q_t = 0\} \cdot P\{q_t = 0\} \\ &= P\{\varepsilon_t < x\} \cdot P\{q_t = 1\} + P\{x > 0\} \cdot P\{q_t = 0\} \\ &= a_c F_\varepsilon(x) + (1 - a_c) F_0(x). \end{aligned}$$

Одавде следи да је њима одговарајућа карактеристична функција:

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} F_\xi(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} [a_c F_\varepsilon + (1 - a_c) F_0](dx) \\ &= a_c \varphi_\varepsilon(u) + (1 - a_c) \varphi_0(u) = 1 + a_c \left(e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} - 1 \right) \\ &= (1 - b_c) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} + b_c. \end{aligned}$$

Применом једнакости (4.30) налазимо да су карактеристичне функције низа (m_t) облика:

$$\varphi_m(u, t) = \varphi_\mu(u) \prod_{j=0}^{t-1} \varphi_\xi(u) = e^{iu\mu} \left[(1 - b_c) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} + b_c \right]^t, \quad (5.15)$$

где је $\varphi_\mu(u) = e^{iu\mu}$ карактеристична функција за $\mu \stackrel{si}{=} m_0$. Из претходне једнакости и теореме Левија 4.3.8 очито следи једнакост (5.12).

На сличан начин, применом претходне једнакости (5.15) и једнакости (4.30), добијају се карактеристичне функције случајних променљивих низа (y_t) :

$$\varphi_y(u, t) = \varphi_m(u) \cdot \varphi_\varepsilon(u) = e^{iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}} \left[(1 - b_c) e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} + b_c \right]^t. \quad (5.16)$$

²⁰ Више детаља о овој расподели може се наћи у монографији (Olofsson, Ericson, & Forchheimer, 2004).

Одавде, поновном применом теореме Левија 4.3.8, непосредно следи једнакост (5.13).

Како би се доказао други део теореме, тј. једнакости (5.14), уочимо да за произвољно $u \in \mathbb{R}$ важи $|e^{iu\mu}| = 1$, као и следећи низ неједнакости:

$$0 < e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \leq 1 \Leftrightarrow -1 < a_c \left(e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} - 1 \right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < 1 + a_c \left(e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} - 1 \right) \leq 1.$$

Одавде добијамо да је $0 < \varphi_m(u, t) \leq 1$ и $0 < \varphi_y(u, t) \leq 1$, за свако $t = 0, 1, \dots, T$, па у случају када $t \rightarrow +\infty$ добијамо:

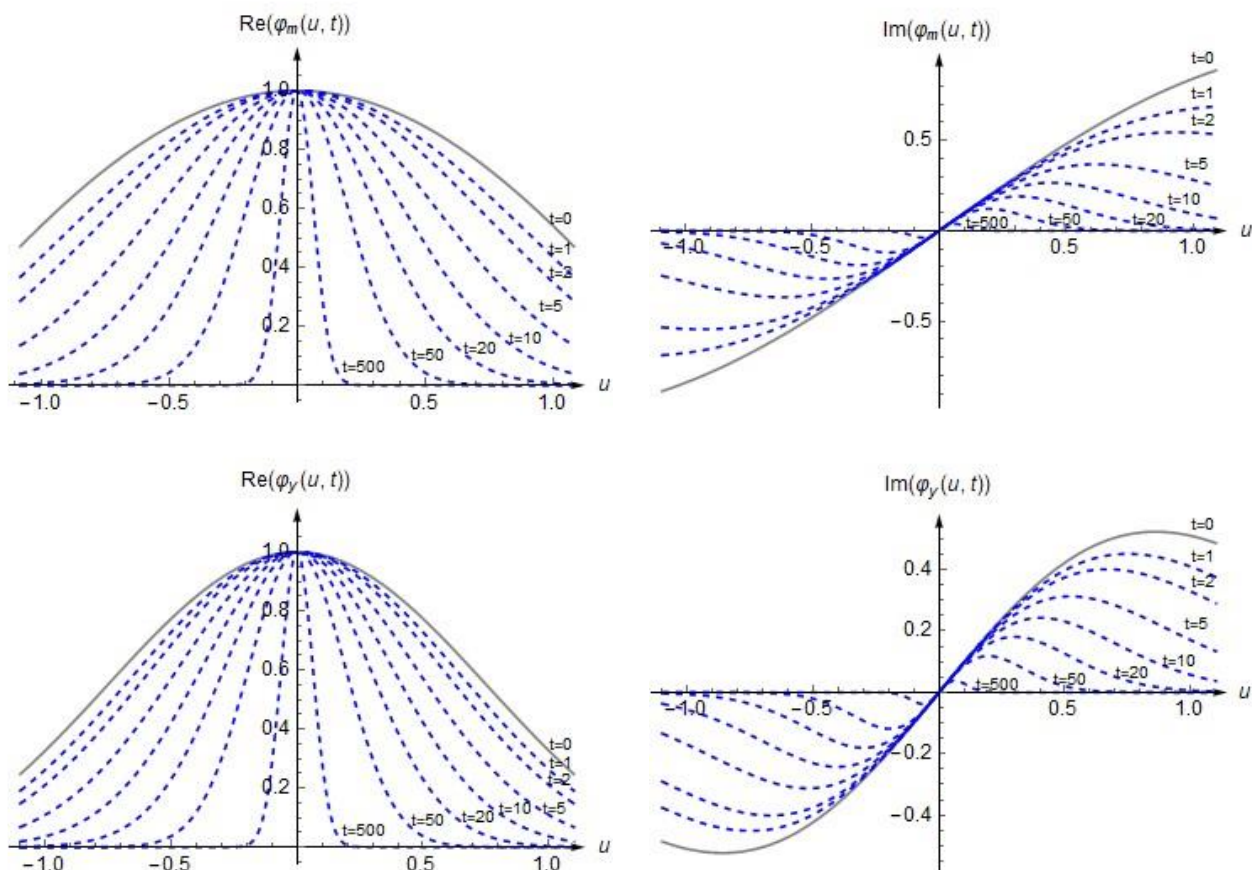
$$\varphi_\delta(u) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_m(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_y(x, t) = \begin{cases} 1, & u = 0; \\ 0, & u \neq 0. \end{cases}$$

Очито, реч је о карактеристичној функцији случајне променљиве $\delta(x)$, чиме је теорема доказана у целини. ■

Напомена 5.2.1. Приметимо да се докази претходних двеју теорема заснивају на налажењу карактеристичних функција одговарајућих временских серија GSB процеса. Притом, основну улогу у њиховом израчунавању имају карактеристичне функције низова некорелираних случајних променљивих (η_t) и (ξ_t) . Ова два низа можемо посматрати као „нове“ шумове са „опционим“ члановима, који суштински описују стохастичку структуру GSB процеса. Притом, за свако $t = 0, 1, \dots, T$ важи релација $\eta_t + \xi_t \stackrel{si}{=} \varepsilon_t$, док се за њихове карактеристичне функције лако показује да важи $\varphi_\xi(u) + \varphi_\eta(u) = 1 + e^{-\sigma^2 u^2 / 2}$. Стога је, теоријски посматрано, довољно разматрати само један од ова два низа некорелираних случајних променљивих (што је и учињено у исказу теореме 5.2.2).

Најзад, једнакост (5.14) показује да нестационарни случајни процеси (m_t) и (y_t) , у граничном случају $t \rightarrow +\infty$, *конвергирају у расподели* ка тзв. сингуларној (односно дегенерисаној) случајној променљивој $\delta(x)$. Ова конвергенција се такође лако може уочити и на основу конвергенције одговарајућих карактеристичних функција $\varphi_m(u, t)$ и $\varphi_y(u, t)$, које су дате једнакостима (5.15) и (5.16). Као илустрација на Слици 5.8 дат је визуелни приказ конвергенције реалних и имагинарних делова ових функција, за различите дужине временских серија (t) , где је за вредности параметара узето $\mu = \sigma^2 = 1$ и $a_c = b_c = 0,5$.

На крају овог одељка описујемо још нека *асимптотска својства* нестационарних временских серија (m_t) и (y_t) која се, пре свега, односе на могућност налажења *граничних (нормалних) расподела*.



Слика 5.8. Графички приказ конвергенције реалних и имагинарних делова карактеристичних функција $\varphi_m(u, t)$ и $\varphi_y(u, t)$

Теорема 5.2.3. За произвољно $\alpha \geq 1$ и временске серије (y_t) и (m_t) дефинишимо тзв. α -усредњене низове:

$$\bar{M}_{t;\alpha} = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^t m_j, \bar{Y}_{t;\alpha} = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^t y_j,$$

Тада важе следећа тврђења:

- i) За $1 \leq \alpha \leq 3/2$ временске серије $\bar{M}_{t;1} = \bar{M}_t$ и $\bar{Y}_{t;1} = \bar{Y}_t$ имају асимптотски нормалну расподелу, тј. важи:

$$\bar{M}_{t;\alpha} \sim \mathcal{N}\left(\mu t^{1-\alpha}, \frac{a_c \sigma^2 t^{3-2\alpha}}{3}\right), \bar{Y}_{t;\alpha} \sim \mathcal{N}\left(\mu t^{1-\alpha}, \sigma^2 t^{1-\alpha} + \frac{a_c \sigma^2 t^{3-2\alpha}}{3}\right), t \rightarrow +\infty. \quad (5.17)$$

- ii) За $\alpha > 3/2$ временске серије $\bar{M}_{t;\alpha}$ и $\bar{Y}_{t;\alpha}$ асимптотски нестају, тј. важи:

$$\bar{M}_{t;\alpha} \xrightarrow{d} I_0, \bar{Y}_{t;\alpha} \xrightarrow{d} I_0, t \rightarrow +\infty. \quad (5.18)$$

Доказ. Тврђење теореме показујемо за временску серију $\bar{M}_{t;\alpha}$ (доказ за $\bar{Y}_{t;\alpha}$ изводи се потпуно аналогно). На основу дефиниције временске серије (m_t) , тј. једнакости (4.31), важи:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{t;\alpha} &= \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^t m_j = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^t \left(m_0 + \sum_{j=0}^{t-1} q_j \varepsilon_j \right) = \frac{1}{t^\alpha} \left[t m_0 + \sum_{j=0}^{t-1} (t-j) q_j \varepsilon_j \right] \\ &= t^{1-\alpha} m_0 + \sum_{k=1}^t \frac{k}{t^\alpha} \xi_{t-k}.\end{aligned}$$

Дакле, низ $\bar{M}_{t;\alpha}$ представљен је као сума некорелираних случајних величина. Применом особина карактеристичних функција наведених у теорему 4.3.7, као и израза за карактеристичне функције чланова низа (ξ_t) , добијају се карактеристичне функције за $\bar{M}_{t;\alpha}$:

$$\varphi_{\bar{M};\alpha}(u, t) = \varphi_m\left(\frac{u}{t^{\alpha-1}}, 0\right) \prod_{k=1}^t \varphi_\xi\left(\frac{ku}{t^\alpha}\right) = e^{iu\mu t^{1-\alpha}} \prod_{k=1}^t \left[1 + a_c \left(e^{-\frac{k^2 \sigma^2 u^2}{2t^{2\alpha}}} - 1 \right) \right].$$

Логаритмовањем функције $\varphi_{\bar{M};\alpha}(u, t)$ добија се функција облика:

$$\psi(u; t, \alpha) := \ln \varphi_{\bar{M};\alpha}(u, t) = iu\mu t^{1-\alpha} + \sum_{k=1}^t f_k(u; t, \alpha),$$

где је $f_k(u; t, \alpha) := \ln[1 + a_c(\exp(-k^2 \sigma^2 u^2 t^{-2\alpha}/2) - 1)]$. Сада, поступком сличним као у (Стојановић, Поповић, & Миловановић, 2016), тј. користећи Лапласову апроксимацију функција $f_k(u; t, \alpha)$ које имају локалне максимуме у тачки $u = 0$, налазимо да је:

$$\begin{aligned}\psi(u; t, \alpha) &= iu\mu t^{1-\alpha} + \sum_{k=1}^t \left[\frac{\partial^2 f(0; t, \alpha)}{\partial u^2} \cdot \frac{u^2}{2} + \sigma_k(u^2) \right] \\ &= iu\mu t^{1-\alpha} + \sum_{k=1}^t \left[-\frac{a_c k^2 \sigma^2 u^2}{2t^{2\alpha}} + \sigma_k(t^{-2\alpha} u^2) \right] \\ &= iu\mu t^{1-\alpha} - \frac{a_c \sigma^2 u^2}{12t^{2\alpha}} t(t+1)(2t+1) + \sigma(t^{1-2\alpha} u^2).\end{aligned}$$

Одавде, преласком на граничну вредност, када $t \rightarrow +\infty$, добијамо:

$$\psi(u; t, \alpha) \sim \begin{cases} iu\mu t^{1-\alpha} - a_c \sigma^2 t^{3-2\alpha} / 6, & 1 \leq \alpha \leq 3/2 \\ 0, & \alpha > 3/2. \end{cases}$$

Заменом овог израза у карактеристичне функције $\varphi_{\bar{M};\alpha}(u, t)$ лако се закључује да важи тврђење теореме. ■

Напомена 5.2.2. У исказу претходне теореме посебно је интересантан случај $\alpha = 3/2$. Тада асимптотске једнакости у (5.17) дају следеће конвергенције (у расподели):

$$\frac{1}{t^{3/2}} \sum_{j=1}^t m_j \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{a_c \sigma^2}{3}\right), \frac{1}{t^{3/2}} \sum_{j=1}^t y_j \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{a_c \sigma^2}{3}\right), t \rightarrow +\infty. \quad (5.19)$$

Ове конвергенције ћемо, уобичајено, звати *централне граничне теореме GSB процеса*, а користићемо их за оцењивање његове дисперзије, тј. непознатог параметра σ^2 .

5.2.2 Оцене параметара GSB процеса

Размотримо сада проблем оцењивања (непознатих) параметара GSB процеса, односно критичне вредности (c) и дисперзије (σ^2)²¹. За оцену параметра c биће коришћена (једина) стационарна компонента овог стохастичког модела, тј. низ прираштаја (X_t) који смо назвали Split-MA(1) процес. Како је овај случајни процес близак стандардним, линеарним MA моделима, поступак који овде излажемо јесте аналоган неким од стандардних метода оцењивања коефицијената таквих модела²². Ипак, специфичност Split-MA(1) модела захтева и нека додатна испитивања и анализе, пре свега квалитета добијених оцена. Након тога биће разматрано и неколико различитих приступа, односно поступака којима се могу добити оцењене вредности параметра σ^2 .

5.2.2.1 Оцена критичне вредности (c)

Нека је Split-MA(1) процес (X_t) дефинисан једнакошћу (4.33). Као што смо већ показали, коефицијент прве корелације овог модела гласи:

$$\rho(1) = -\frac{b_c}{1 + b_c}, 0 < b_c < 1.$$

Одавде, решавањем по b_c добијамо оцењену вредност овог параметра:

$$\tilde{b}_c = -\frac{\hat{\rho}(1)}{1 + \hat{\rho}(1)}, 0 < b_c < 1, \quad (5.20)$$

где је:

$$\hat{\rho}(1) = \left(\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1} \right) \left(\sum_{t=1}^T X_t^2 \right)^{-1}$$

оцењена, емпиријска вредност прве корелације. На основу оцене \tilde{b}_c може се одредити одговарајућа оцена критичне вредности $c = \tilde{c}$ као решење једначине:

$$P\{\varepsilon_t^2 \leq c\} = \tilde{b}_c.$$

Притом, лако се уочава да су оцене \tilde{b}_c и \tilde{c} одговарајуће ако важе неједнакости:

$$0 < \tilde{b}_c < 1 \Leftrightarrow -0,5 < \hat{\rho}(1) < 0.$$

²¹ Као (непристрасна) оцена за параметар $\mu = E(y_t)$ узима се аритметичка средина $\mu = \bar{y}_T$.

²² Више детаља о оценама параметара MA модела може се наћи, рецимо, у монографијама (Fuller, 1976) или (Малишић, Ј., 2002).

У раду (Стојановић, В. и сар., 2011) показано је да су овако добијене оцене строго постојане уколико је расподела белог шума (ε_t) апсолутно-непрекидног типа. Штавише, оцене \tilde{b}_c и \tilde{c} биће и асимптотски нормалне, ако случајне променљиве низа (ε_t) имају симетричну расподелу. Очито, оба ова услова су испуњена у случају гаусовског шума $\varepsilon_t: \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Приметимо да тада случајне променљиве $(\varepsilon_t/\sigma)^2$ имају χ_1^2 расподелу, па се оцена критичне вредности \tilde{c} једноставно налази из једнакости:

$$\tilde{c} = \tilde{\sigma}^2 \cdot F_{\chi_1^2}^{-1}(\tilde{b}_c).$$

Притом, овде је $\tilde{\sigma}^2$ оцењена вредност дисперзије шума (ε_t) , која ће бити описана касније.

Ипак, може се показати да, слично линеарним МА серијама, оцена \tilde{b}_c није најефикаснија оцена за b_c (асимптотска ефикасност оцена \tilde{b}_c и $\tilde{\sigma}^2$ у случају гаусовског шума анализирана је на крају овог одељка). Ради добијања ефикаснијих оцена датих параметара извршићемо модификацију познатог *Гаус-Њутновог метода* оцењивања параметара нелинеарних функција, детаљно описаног, рецимо, у монографији (Fuller, 1976). Најпре уочимо да једнакост (4.33) можемо написати у облику:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}, t = 1, \dots, T$$

или, у функционалном облику,

$$\varepsilon_t(X, \theta) = X_t + \theta_{t-1}\varepsilon_{t-1}(X, \theta). \quad (5.21)$$

С друге стране, дефинишимо низ случајних променљивих:

$$W_t(X, \theta) = \theta_t W_{t-1}(X, \theta) + \varepsilon_{t-1}(X, \theta). \quad (5.22)$$

Лако је уочити да случајне величине $W_t(X, \theta)$ јесу \mathcal{F}_{t-1} адаптиране за свако $t = 1, \dots, T$, као и независне од ε_t и θ_{t+1} . На основу теореме у (Поповић, 1992) следи да низ $(W_t(X, \theta))$ јесте стационаран и ергодичан низ случајних величина. Овом низу, поступком описаним у (Lawrence & Lewis, 1992), можемо придружити тзв. *резидуални низ*:

$$R_t(X, \theta) = W_t(X, \theta) - b_c W_{t-1}(X, \theta). \quad (5.23)$$

за који се на једноставан начин показује некорелисаност. Приметимо да последња једнакост дефинише низ $(W_t(X, \theta))$ као линеарни ауторегресивни (AR) процес са шумом $(R_t(X, \theta))$, па „нову“ оцену непознатог параметра $b_c \in (0,1)$ добијамо следећим, алгоритамским поступком:

- 1) Применом једнакости (5.20) одредимо \tilde{b}_c као иницијалну (оцењену) вредност датог параметра.
- 2) На основу једнакости (5.21)-(5.23) и претходно добијене оцене \tilde{b}_c формирамо за свако $t = 1, \dots, T$ следећи низ вредности:

$$\tilde{\theta}_t := I(\varepsilon_{t-1}^2(X, \tilde{\theta}) \leq \tilde{c})$$

$$\varepsilon_t(X, \tilde{\theta}) := X_t + \tilde{\theta}_{t-1} \varepsilon_{t-1}(X, \tilde{\theta})$$

$$W_t(X, \tilde{\theta}) := \tilde{\theta}_t W_{t-1}(X, \tilde{\theta}) + \varepsilon_{t-1}(X, \tilde{\theta})$$

$$R_t(X, \tilde{\theta}) := W_t(X, \tilde{\theta}) - \tilde{b}_c W_{t-1}(X, \tilde{\theta}),$$

где је $\tilde{\theta}_0 = 1$, $\varepsilon_0(X, \tilde{\theta}) = \varepsilon_{-1}(X, \tilde{\theta}) = 0$ и $W_0(X, \tilde{\theta})$ произвољна вредност.

3) Стандардним регресионим поступком добијамо оцену за b_c облика:

$$\hat{b}_c = \left(\sum_{t=1}^T W_t(X, \tilde{\theta}) W_{t-1}(X, \tilde{\theta}) \right) \left(\sum_{t=1}^T W_t^2(X, \tilde{\theta}) \right)^{-1}.$$

4) На исти начин као и раније оцену критичне вредности $c = \hat{c}$ можемо добити на основу оцене \hat{b}_c , тј. као решење једначине (у односу на c):

$$P\{\varepsilon_t^2 \leq c\} = \hat{b}_c.$$

На крају нагласимо да је у раду (Стојановић, В. и сар., 2011), као и у претходном излагању, доказана (строга) постојаност и асимптотска нормалност оцена \hat{b}_c и \hat{c} . Штавише, применом неких од граничних теорема (Serfling, 1980) показује се да је вредност асимптотске дисперзије оцене \hat{b}_c , као мере „расејања“ од стварне вредности b_c , (знатно) мања од асимптотске дисперзије оцене \tilde{b}_c . Самим тим, \hat{b}_c је *ефикаснија* оцена од \tilde{b}_c , чиме се и оправдава њено увођење.

5.2.2.2 Оцена дисперзије (σ^2)

Посветимо се сада одређивању оцена другог непознатог параметра σ^2 , који представља дисперзију шума (ε_t), односно условну дисперзију основног низа GSB процеса (y_t). Управо ове чињенице омогућавају различите поступке оцењивања параметра σ^2 . Учимо најпре да се на основу претходно добијених оцена \tilde{b}_c и \hat{b}_c , односно моделованих вредности шума (ε_t) датих једнакошћу (5.20), може оценити и вредност њихове дисперзије σ^2 . Класичан поступак оцењивања заснива се на узорачкој дисперзији:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2(X, \tilde{\theta}) \quad \text{или} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2(X, \hat{\theta}). \quad (5.24)$$

Овде су $\varepsilon_t(X, \tilde{\theta})$ и $\varepsilon_t(X, \hat{\theta})$ моделоване вредности белог шума добијене на основу оцена \tilde{b}_c и \hat{b}_c , респективно. У случају гаусовности шума (ε_t) ове оцене идентичне су оценама максималне веродостојности. Наиме, логаритмована функција вредности тада гласи:

$$L(y_1, \dots, y_T; \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (y_t - m_t)^2.$$

Одавде се добија оцењена вредност дисперзије:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - m_t)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2,$$

која је идентична варијанси серије (ε_t) . На једноставан начин се тада показује постојаност и асимптотска нормалност оцена $\tilde{\sigma}^2$ и $\hat{\sigma}^2$.

Други приступ у оцењивању дисперзије σ^2 заснива се на тзв. *двоетапном поступку*, коришћењем претходно оцењених параметара \hat{b}_c , односно $\hat{a}_c = 1 - \hat{b}_c$. Тада, рецимо, на основу једнакости $D(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2(b_c + 1)$, односно узорачке дисперзије низа (X_t) , можемо формирати оцену облика:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{T(\hat{b}_c + 1)} \sum_{t=1}^T X_t^2. \quad (5.25)$$

Како је (X_t) стационаран и ергодичан низ случајних променљивих, а \hat{b}_c постојана и асимптотски непристрасна оцена за b_c , то ће исте ове особине имати и оцена $\hat{\sigma}_X^2$.

Најзад, још једна могућност за налажење „добрих“ оцена дисперзије σ^2 заснива се на опсервацијама основног низа (Y_t) . Иако је реч о нестационарном низу случајних променљивих, применом конвергенције (5.19) имамо да је:

$$\bar{Y}_{T;3/2} := \frac{1}{T^{3/2}} \sum_{t=1}^T y_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{a_c \sigma^2}{3}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Ако сада уочимо статистику:

$$S_T^2 := \bar{Y}_{T;3/2}^2 = \frac{1}{T^3} \left(\sum_{j=1}^T y_j \right)^2 = \frac{1}{T^3} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T y_j y_k,$$

онда након извесног израчунавања добијамо:

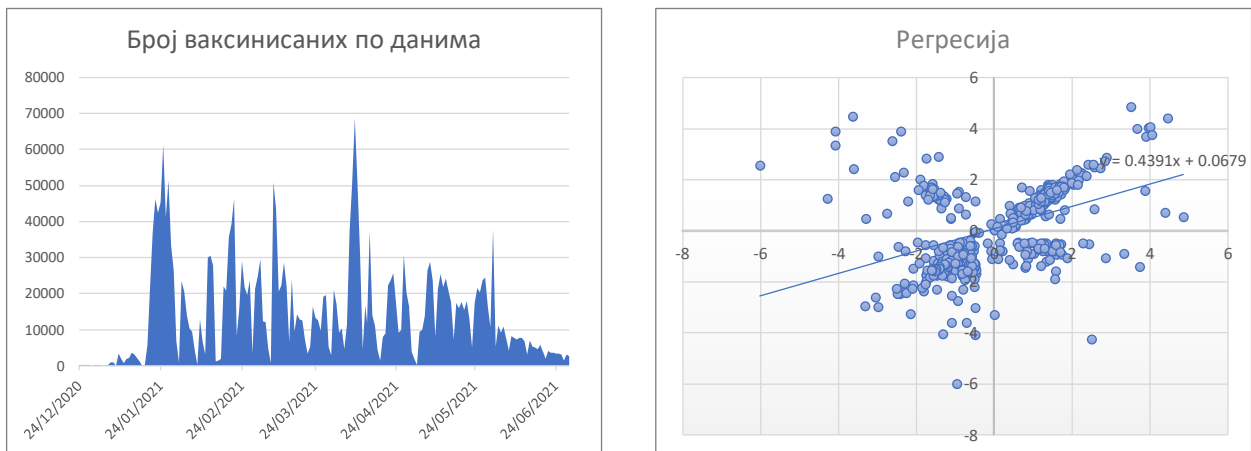
$$\begin{aligned} E(S_T^2) &= \frac{1}{T^3} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T E(y_j y_k) = \frac{1}{T^3} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T [Cov(y_j y_k) + \mu^2] \\ &= \frac{1}{T^3} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T [\sigma^2(\min\{j, k\} a_c + 1) + \mu^2] \\ &= \frac{\sigma^2 a_c}{6T^2} (T+1)(2T+1) + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{T} \rightarrow \frac{a_c \sigma^2}{3}, t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Дакле, S_T^2 је асимптотски непристрасна оцена за $a_c \sigma^2 / 3$, па коришћењем оцене $\hat{a}_c = 1 - \hat{b}_c$, као оцену параметра σ^2 можемо узети статистику:

$$\hat{\sigma}_Y^2 := \frac{3}{\hat{a}_c} S_T^2 = \frac{3}{\hat{a}_c T^3} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T y_j y_k. \quad (5.26)$$

5.2.3 Примена GSB процеса

Као илустрацију за практичну примене GSB процеса показаћемо да он може бити адекватан стохастички модел описивања динамике броја вакцинисаног становништва на територији Републике Србије. Стога са (V_t) означимо реализацију временске серије која, на дневном нивоу, представља укупан број лица вакцинисаних првом дозом вакцине, почев од 24. 12. 2020. па закључно са 6. 6. 2022. године. Приметимо да смо већ раније, у трећем поглављу ове дисертације, описали основне статистичке показатеље ове серије (видети Табелу 3.3). Већ на основу овако добијених вредности јасно је да је реч о временској серији дужине $T = 529$ са изразитим, наглашеним флукуацијама, приказаним на Слици 5.9 (лево). Приметимо, рецимо, да просечан број вакцинисаних лица износи 6.348 дневно, али се распон броја вакцинисаних креће од само 4 (четири) па до чак 68.678 особа дневно. Стога сматрамо да се овде, као основни стохастички модел, може користити GSB процес који је описан у претходном излагању.



Слика 5.9. Динамика броја вакцинисаног становништва (лево) и регресиона анализа у оцењивању параметара GSB процеса (десно)

У ту сврху, полазећи од сличних претпоставки као и (Hafner, 1998), као основни низ посматрамо реализације тзв. *лог-волумена*, односно логаритмоване вредности серије (V_t) :

$$y_t := \ln(V_t), t = 0, 1, \dots, T.$$

Основни статистички показатељи ове серије приказани су, између осталог, у Табели 5.2, при чему можемо приметити да на основу неједнакости $V_t \geq 1$ непосредно следи ненегативност временске серије лог-волумена ($y_t \geq 0$). На основу добијених вредности низа (y_t) најпре смо методом условне максималне веродостојности, која је описана у

претходном одељку, применом једнакости (5.24) оценили његову непознату условну дисперзију σ^2 . На основу ње у могућности смо да применом једнакости:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = y_t - m_t, \\ m_t = m_{t-1} + \varepsilon_{t-1} I\{\varepsilon_{t-1}^2 \geq \hat{c}\} \end{cases} \quad (5.27)$$

генеришемо одговарајуће вредности низова (ε_t) и (m_t) . Притом, као оцене критичне вредности реакције узимамо оцене описане у претходном делу. Најзад, као почетне вредности итеративног поступка (5.27) узећемо $m_0 = y_0 = \bar{y}_T$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 0$, где смо са \bar{y}_T означили средњу вредност низа (y_t) .

На овај начин добијају се моделоване вредности низова (ε_t) и (m_t) на основу којих се формира одговарајући стохастички модел динамике броја вакцинисаних. Притом, као основни емпиријски низ посматрају се лог-волумени дефинисани једнакошћу (5.27), на основу којих се једноставно одређују вредности низа прираштаја (X_t) , односно реализације Split-MA(1) процеса, о чему је било речи раније. У Табели 5.2 приказане су вредности основних статистичких показатеља свих раније описаних низова: лог-волумена (y_t) , мартингалних просека (m_t) , Split-MA(1) процеса (X_t) , као и белог шума (ε_t) .

Табела 5.2. Основни статистички показатељи моделованих вредности низова GSB процеса

Статистике узорка	Временске серије			
	Y_t	m_t	X_t	ε_t
Средња вредност	8,6783	8,9349	-0,0062	-0,1417
Медијана	9,2116	9,4269	-0,0526	-0,0806
Модус	5,5607	10,6967	-	1,4469
Станд. Девијација	1,8913	1,7589	1,0143	1,0737
Дисперзија	3,5770	3,0936	1,0287	1,1528
Коеф. спљоштености	0,4213	0,6732	6,0127	5,1416
Коеф. асиметричности	-0,9953	-1,0703	0,4258	-0,0357
Распон	10,2113	10,2113	10,5701	10,8705
Минимум	1,0986	1,0986	-5,0554	-6,0141
Максимум	11,3099	11,3099	5,5147	4,8564
Дужина	530	530	530	530

Детаљнијом анализом добијених серија, односно упоређивањем израчунатих емпиријских вредности основних статистичких параметара, уочава се занимљива веза која се може објаснити претходним теоретским резултатима. Наиме, емпиријска средња вредност лог-волумена је „блиска“ средњој вредности мартингалних просека, што је у складу са једнакошћу $E(y_t) = E(m_t)$.

У наредном кораку, примењујући итеративни поступак описан у претходном одељку, могу се оценити непознати параметри GSB процеса, пре свега критична вредност (c) и дисперзија (σ^2). Притом, подсетимо се да поступак оцењивања параметра c захтева тзв. двоетапну процедуру, тј. најпре се оцењује вредност $b_c \in (0,1)$, а затим се на основу ње добијају оцене критичне вредности c . У Табели 5.3 приказане су најпре оцењене вредности коефицијента прости линеарне корелације $\hat{\rho}(1)$, а затим оцењене вредности \tilde{b}_c и \tilde{c} , добијене на основу формуле (5.20) и χ_1^2 расподеле низа. Затим су, применом низа једнакости (5.21)-(5.23), односно Гаус-Њутновог метода, одређене ефикасније оцене ова два параметра \hat{b}_c и \hat{c} . Подсетимо се да су ове оцене добијене раније описаним регресионим поступком, који је приказан и на Слици 5.9 (десно). Најзад, у последњим двома колонама Табеле 5.3 приказане су оцењене вредности дисперзије σ^2 на основу моделираних вредности белог шума (ε_t), односно применом једнакости (5.24). Уочимо да су ове оцењене вредности „блиске“ јединици, тако да се може претпоставити да бели шум (ε_t) у овом случају има стандардну нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу.

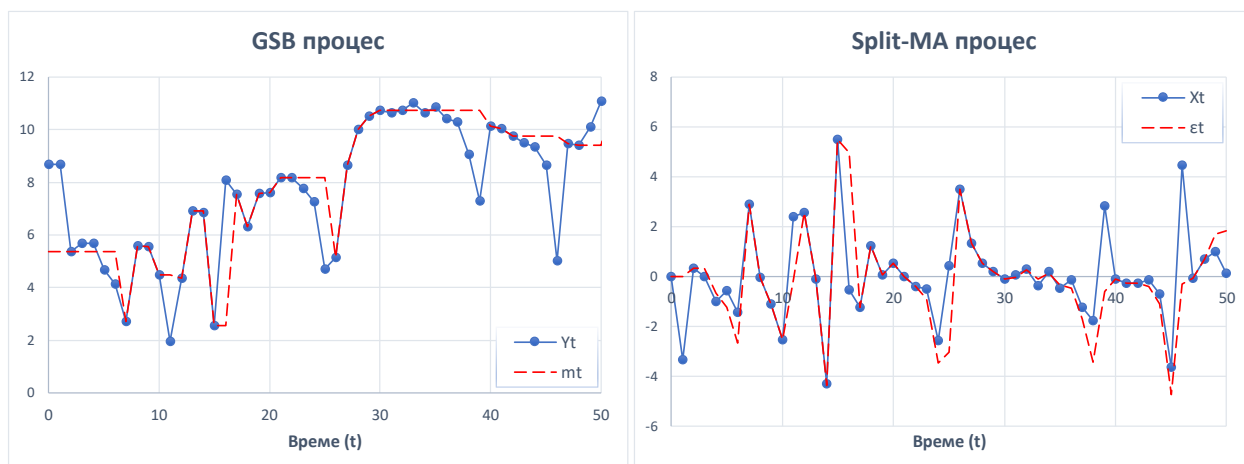
Табела 5.3. Оцењене вредности параметара GSB процеса

Оцена	$\hat{\rho}(1)$	\tilde{b}_c	\tilde{c}	\hat{b}_c	\hat{c}	$\tilde{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}^2$
Вредност	-0,2596	0,3507	0,2067	0,4391	0,3381	1,0737	1,0066

На основу оцењених вредности параметара GSB процеса могу се формирати тзв. моделоване вредности одговарајућих низова који описују динамику укупног броја вакцинисаног становништва. Добро слагање моделованих низова са емпиријским подацима може се уочити и на Слици 5.10 (лево), где су, упоредо са емпиријским вредностима лог-волумена (y_t), дате и моделоване вредности мартингалних просека (m_t). Добијене реализације ових низова јасно указују на њихову наглашену, високу корелацију, која је потпуно у складу са самом дефиницијом GSB процеса, задатог адитивним разлагањем, односно једнакошћу (4.30), чиме се и оправдава избор GSB процеса као одговарајућег стохастичког модела.

С друге стране, слагање белог шума (ε_t) са низом прираштаја, тј. Split-MA(1) процесом (X_t), приказано је на истој Слици 5.10 (десно). Висок степен корелације ова два низа може се и теоретски објаснити на начин на који је то учињено у одељку 4.5.3. Наиме, уколико у неком временском тренутку низ (X_t) има наглашену флукуацију, он у наредном тренутку постаје једнак шуму (ε_t). Јасно је да ће једнакост у реализацијама ова два низа бити утолико већа уколико, поред наглашених флукуација низа (X_t), и критична вредност реакције c буде релативно мала. У том случају мале вредности параметра c указују на могућу хипотезу о томе да је стварна вредност овог параметра $c = 0$, када се низ прираштаја

(X_t) у потпуности изједначава са шумом (ε_t) . Приметимо да тада основни низ (y_t) представља низ са независним прираштајима, па целокупна статистичка анализа његове динамике добија на једноставности.



Слика 5.10. Упоредни графикони реализација емпиријских и моделираних података: лог-волумена и мартингалних просека (лево), односно Split-MA(1) процеса и белог шума (десно)

5.3 ПРИМЕНЕ МОДЕЛА ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКОГ ОДЛУЧИВАЊА У ОДАБИРУ ПУНКТА ЗА ИМУНИЗАЦИЈУ

Вишекритеријумске методе доношења одлука (енг. *Multi-criteria decision-making methods – MCDM*), као што је претходно речено, представљају значајан чинилац који утиче на финални исход одлучивања и могућности за рангирање које су део овог модела и начина одлучивања. Зато је неопходно одредити критеријумске пондере на прави начин. Одређивање критеријумских пондера може се урадити помоћу различитих метода, а све оне могу бити класификоване у две групе: субјективне и објективне методе.

Субјективне методе су методе које углавном поштују субјективне преференције доносиоца одлука или експерата у процесу евалуације релевантности критеријума. Међу методама које припадају овој групи, а које се најчешће употребљавају при вишекритеријумском доношењу одлука, како смо већ навели у другом поглављу ове дисертације, спадају аналитички хијерархијски процес (енг. *Analytical Hierarchy Process – AHP*), као и неке његове напредне форме и спајања са другим методама као, на пример, расплнута логика. Стално праћење и квантификовање ефеката посла у савременом друштву неопходан је елемент његове успешне реализације, без обзира о којој је врсти процеса реч и из које области људске делатности потиче. Логистички процеси су кључни за постизање успеха, а основни показатељ је дефинисани однос између постигнутих резултата и уложених ресурса – који се назива ефикасност. Мерење и повећање ефикасности неопходан је предуслов за имплементацију ефикасних логистичких система, због чега је то

значајна научна дисциплина, заступљена у светској литератури и пракси. Главни циљ овог дела истраживања (студије случаја) јесте систематски преглед могућих начина одређивања критеријумских пондера од стране доносилаца одлука или других учесника у процесу одлучивања.

У раду (Ibrahim & Ali, 2019) аутори предлажу нову методу пуне конзистенције (енг. *Full Consistency Method – FUCOM*). Ова метода имплицира формирање двеју посебних група ограничења које би требало да испуне оптималне вредности критеријумских пондера. Прва група ограничења заснована је на чињеници да коефицијенти критеријумских пондера треба да буду једнаки са компаративним приоритетима критеријума, док је друга група ограничења заснована на условима математичке прелазности. Оба ограничења су решена помоћу FUCOM модела, а поред оптималних вредности пондера, добија се одступање од пуне конзистентности, чији степен представља одступање вредности пондерских коефицијената од процењених компаративних критеријумских приоритета. Такође, рад (Поповић, Кузмановић, & Савић, 2018) је заснован на опису кључне разлике између концептуалних и теоретских оквира, као и на прегледу литературе која се односи на компаративне студије АНР методе и обједињене анализе. Објективне методе, са друге стране, баве се одређивањем пондерских коефицијената на основу анализе одређених података који се користе за решавање специфичних математичких модела одабраних метода вишекритеријумског доношења одлука, без сагледавања ставова доносилаца одлука или експерата.

Објективне методе које се најчешће употребљавају су: ентропија, одређивање важности критеријума кроз међукритеријумску корелацију (енг. *Criteria Importance Through Inter-criteria Correlation – CRITIC*), анализа обима података, корелацијска анализа, регресијска анализа, факторска анализа итд. Главни циљ рада (Милићевић & Жупац, 2012) је приказ могућих начина објективног одређивања критеријумских пондера помоћу алгоритама у којима релативна важност критеријума рефлектује количину информација које они садрже, што је повезано са интензитетом контраста сваког од критеријума. Најзад, радови (Ранђеловић, Станковић, Јанковић-Милић, & Станковић, 2013) и (Ранђеловић, Јањић, Станковић, Ранђеловић, & Пешић, 2013) представљају могућности и резултате примене регресивне анализе као и факторске и корелационе анализе у пондерисању критеријума који спадају под објективан приступ као класичне статистичке методе.

5.3.1 Метод аналитичког хијерархијског процеса (АНР метод)

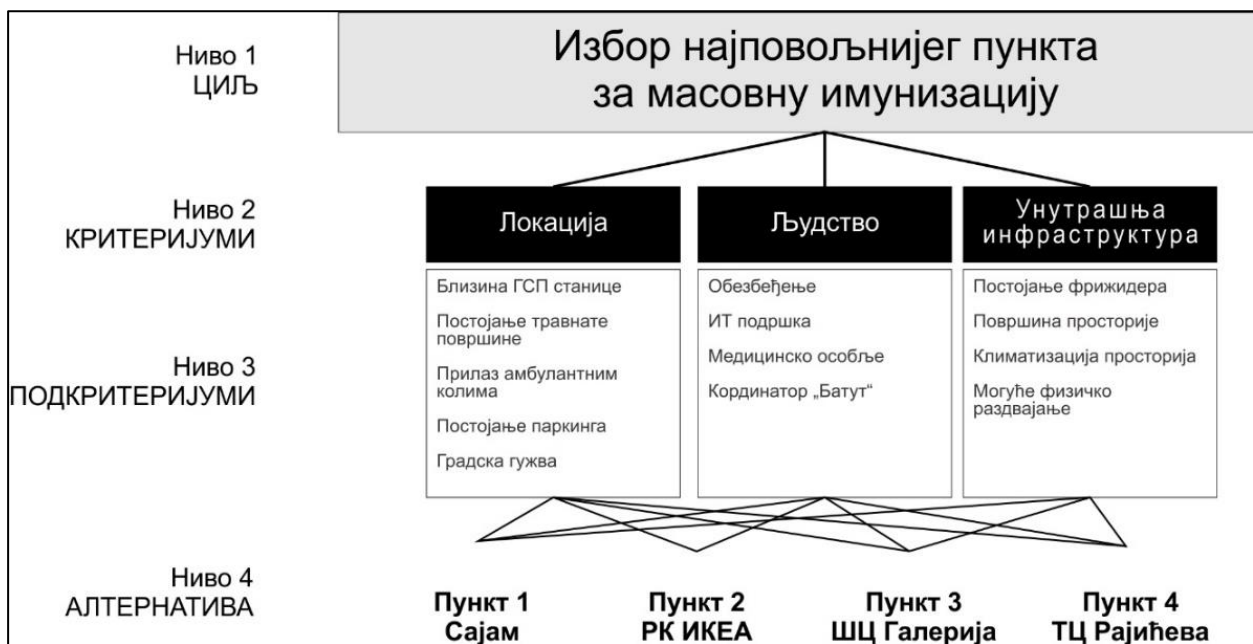
АНР метод је мултикритеријумска анализа и представља научну базу за проблем у вези са доношењем одлука. У широкој је примени од осамдесетих година прошлог века,

када су доносиоци одлука били или појединци или групе (Saaty & Vargas, 1994). Готово сви проблеми везани за вишекритеријумско одлучивање користили су АНР као квантитативну технику, а његова примена може обухватити више од 150 различитих подручја. АНР метода је метода која се користи за формулисање и анализу одлука и може да измери утицај многих фактора релевантних за могуће исходе одлука. Може се, на пример, користити за предвиђање перформанси релативне расподеле вероватноће исхода.

Према (Saaty, T. L., 1977), АНР алгоритам заснован је на три принципа:

1. Декомпозиција структуре циљ-вредност, где се развија хијерархија критеријума, поткритеријума и алтернатива, са бројем нивоа који је одређен карактеристикама проблема;
2. Упоредна процена критеријума о појединачним парним поређењима таквих критеријума у односу на више критеријуме;
3. Линеарно заснована синтеза приоритета, где се алтернативе процењују у пару у односу на критеријуме на следећем нивоу хијерархије, а критеријумима се може дати приоритет изражен као пондер у АНР матрици.

На првом нивоу проблем је разложен кроз хијерархијску структуру. Циљ првог нивоа је на врху структуре, док се критеријуми одлучивања третирају на нижим нивоима унутар структуре. На најнижем хијерархијском нивоу постоји много алтернатива за које се морају направити поређења. Следећа фаза подразумева парну анализу упоредних критеријума, као и алтернатива одређеног хијерархијског нивоа, такође у релацији са критеријумима који су на критеријуму непосредно изнад у хијерархијској структури. Парна анализа критеријума настала је као одговор на питање који од два посматрана атрибута алтернативе одређеном критеријуму више одговара испуњењу критеријума и доприноси циљу. Снага преференције је изражена скалом односа, са инкрементом од 1 до 9. Најнижи преференцијални ниво, тзв. ниво 1, показује једнакост опсервираних особина (атрибута), док највиши преференцијални ниво, тј. ниво 9 означава атрибут са највећом предношћу у односу на остале (Ma & Zhang, 1991; Leskinen, 2000). Такву скалу је створио Сати 1977. године, а користи се у основној АНР методи, као и за њену каснију, напредну варијанту – аналитички мрежни процес (енг. *Analytical Network Process – ANP*) (Мимовић, Коцић, & Милановић, 2012). Дефинисана скала омогућава само поређења ограниченог опсега, али је сама перцепција ипак довољно осетљива да направи разлику у важности алтернатива. На Слици 5.11 приказана је АНР хијерархија проблема за одабир најповољнијег пункта за масовну имунизацију са 3 критеријума и 13 поткритеријума, као и 4 алтернативе (пунктови од којих ће бити један одабран).



Слика 5.11. АНР хијерархија проблема за одабир најповољнијег пункта за масовну имунизацију

На основу АНР методе дефинисан је циљ, што је у нашем случају одабир најповољнијег пункта за масовну имунизацију. Након тога приступљено је утврђивању критеријума у вези са постављеним циљем, а то су локација, људство и унутрашња инфраструктура. Међутим, као што је чест случај, дати критеријуми имају поткритеријуме, који су у овом примеру дати у Табели 5.4.

Табела 5.4. Критеријуми са поткритеријумима за одабир најповољнијег пункта

Локација	Људство	Унутрашња инфраструктура
Близина ГСП станице	Обезбеђење	Постојање фрижидера
Постојање травнате површине	ИТ подршка	Површина просторије
Прилаз амбулантним колима	Медицинско особље	Климатизација просторија
Постојање паркинга	Координатор „Батут“	Могуће физичко раздвајање
Градска гужва		

На крају прве фазе примене наведене методе предложене су могуће алтернативе. То су следећа потенцијална места:

1. *Београдски сајам (Сајам)*. Београдски сајам располаже са 6 хала различитог капацитета, које су погодне за организовање различитих врста догађаја. Паркинг око Сајма је простран, паркинг места су велика и могуће је паркирати чак и комбије. До

Сајма се може доћи из више праваца, како сопственим колима, тако и градским превозом.

2. *Робна кућа ИКЕА (РК ИКЕА)*. Робна кућа површине од 35.000 m² се налази на ауто-путу Београд–Ниш, искључење код петље Траншпед. Око робне куће има много простора за паркирање возила свих врста и величина. До робне куће може се доћи ИКЕА аутобусом који вози на релацији Савски мост – ИКЕА – Савски мост, а до робне куће вози и редовна аутобуска линија 276.
3. *Шопинг центар Галерија (ШЦ Галерија)*. Шопинг центар у Београду на води представља највећи тржни центар на Балкану, укупне површине 300.000 квадратних метара. Овај центар креиран је уз примену свих светских стандарда, поседује највећи зелени кров у региону, као и укупно 3.600 паркинг места.
4. *Тржни центар Рајићева (ТЦ Рајићева)*. Тржни центар Рајићева смештен је у самом срцу града Београда, на углу три улице – Кнез Михаилове, Краља Петра и Узун Миркове. Простор од 15.000 m² дизајниран је за уживање и куповину у најлепшем делу града.

Након формулисања хијерархијског принципа, доношење одлука врши се поређењем парова елемената (критеријума) истих нивоа, како би се утврдио међусобни приоритет између критеријума, тј. ранг датих критеријума. Поређење је вршено на основу принципа међусобног значаја елемента у односу на елемент вишег нивоа. Табела 5.5 приказује хијерархију критеријума за одабир најповољнијег пункта, где је поређење елемената извршено на основу најкоришћеније, Сатијеве скале.

Табела 5.5. Скала релативног значаја критеријума по Сатијевој скали

Дефиниција	Нумеричка вредност
Исти значај	1
Слаба доминантност	3
Јака доминантност	5
Врло јака доминантност	7
Апсолутна доминантност	9
Међувредности	2, 4, 6, 8

Као што је већ наведено приликом израде модела, скале су релативног значаја, јер се парови упоређују међусобно један са другим, тј. релативно. Пример таквог поређења дат је у наредној Табели 5.6.

Табела 5.6. Поређење парова критеријума

Локација	9	7	5	3	1	3	5	7	9	Унутрашња инфраструктура
----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--------------------------

Као што може да се уочи, доносиоци одлуке су доделили вредност слабе доминантности за критеријум унутрашња инфраструктура у односу на локацију при одабиру најповољнијег пункта. Након првог поређења свих критеријума међусобно извршена су поређења свих поткритеријума, што представља другу фазу у примени дате методе. Посматрано из угла одабира најповољнијег пункта, полазећи од реципрочне матрице, унутрашња инфраструктура је $1/3$ (0,33) у односу на локацију. Можемо овде истаћи да су критеријуми горњег троугла матрице реципрочни у односу на вредности доњег троугла матрице, а у односу на дијагонали која увек има вредност 1. Попуњавање матрице поређења довољно је извршити само вредностима изнад дијагонале, јер елементи испод дијагонале представљају њихове реципрочне вредности.

Табела 5.7. Матрица поређења критеријума

	Локација	Људство	Унутрашња инфраструктура
Локација	1	7	3
Људство	1/7 (0,14)	1	1/7 (0,14)
Унутрашња инфраструктура	1/3 (0,33)	7	1

За решавање проблема у вези са одређивањем вредности критеријума коришћен је поступак описан у раду (Јовановић и сар., 2020). Сам предложени модел спаја, како субјективне, тако и објективне методе у одређивању критеријумских пондера. Наиме, израчунате вредности пондера објективних критеријума заправо одређују утицај, тј. ефекат сваког појединог критеријума на рационалност могућих алтернатива, али субјективне тежине критеријума указују на њихову важност у смислу рационалности разматраних алтернатива, а у неким случајевима ови субјективни и објективни критеријуми се значајно разликују, што има негативан утицај на тачност одређивања алтернатива у разматраним процесима BFC и LBFC MCDM. Предложени процес би требало користити као једну од најважнијих процедура у планирању одрживог локалног економског развоја.

Сертификација повољног пословног окружења (енг. *Business Friendly Certification – BFC*) у јединицама локалне самоуправе (ЈЛС) јесте процес који уводи стандарде за ефикасно и транспарентно управљање и уједно омогућава евалуацију квалитета и релевантности услуга и информација за инвеститоре и предузетнике. Тренутна примена ове процедуре у Републици Србији има за циљ унапређење пословног окружења

кроз институционалне реформе, нарочито у јавној администрацији на локалном нивоу, уз активно учешће економских субјеката, грађана и општина у оквиру једне јединице локалне самоуправе. Процес укључује детерминацију и евалуацију различитих критеријума на нивоу јединица локалне самоуправе (Ранђеловић, М.; Недељковић, С.; Јовановић, М.; и сар., 2020; Ранђеловић, М; Станковић, Ј; Савић, Г; Кук, К; Ранђеловић, Д, 2018). Зато процес сертификације повољног пословног окружења допуњен је још једним процесом који спроводе локалне самоуправе – **локалним процесом сертификације повољног пословног окружења** (енг. *Local Business Friendly Certification – LBFC*), који подразумева детерминацију и евалуацију различитих фактора по критеријумима који узимају у обзир њихов утицај на испуњење захтева локалног пословног окружења, као и утицај на привлачење потенцијалних инвеститора. Треба имати на уму да ови фактори подразумевају, како оне факторе које одређују републичке власти, тако и оне које одређују локалне.

Процес сертификације пословног окружења, заједно са поменутиим локалним процесом сертификације повољног пословног окружења, мора бити имплементиран у складу са дефинисаним моделом цикличног алгорита намењеног стратешком планирању локалног економског развоја, а који је уоквирен динамиком годишњег циклуса. Већину савремених приступа за одређивање тежине критеријума суштински је могуће поделити на две групе: *субјективне приступе* и *објективне приступе*. Субјективни приступи заснивају су на утврђивању озбиљности критеријума, при чему се они ослањају на информације добијене од самих доносиоца одлука или стручњака који су укључени у процесе доношења одлука. Ови приступи изражавају субјективно мишљење, тј. интуитиван став доносиоца одлука, чиме доносилац одлуке може директно да утиче на исход одлучивања. С друге стране, објективни приступи се заснивају на утврђивању озбиљности критеријума користећи информације добијене помоћу математичких образаца, а које су садржане у матрици одлучивања. Како би се побољшао квалитет и прецизност критеријума, за одређивање пондера користи се нека од метода композитне евалуације, односно *метод агрегације*. Сама агрегација представља процес обједињавања и „спајања“ неколико (најчешће нумеричких) вредности у јединствену *пондерисану вредност*. Притом, функција која на основу вектора улазних вредности даје јединствену излазну вредност назива се *функција агрегације*. Поступак агрегација има значајну улогу у оптимизацији решења различитих проблема у многим научним областима, а посебно тамо где долази до увођења фузије података. То је управо и случај код примене методе вишекритеријумског одлучивања у локалном процесу сертификације повољног пословног окружења (LBFC) и фактора узетих у обзир са републичког нивоа у процесу сертификације повољног пословног окружења (BFC). Они одређују рангове посматраних самоуправа, тј. општина или градова

на државном нивоу, и тако показује локалној самоуправи са колико интензитета морају побољшати одреднице локације у локалном процесу сертификације повољног пословног окружења.

5.3.2 Метод ентропије

Полазећи од фундаменталног рада (Shannon, 1948), а касније и (Sanchez & Soyer, 1998) претпоставимо да $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ одређује тзв. *вектор приоритета* по одређеном критеријуму $j, j = 1, \dots, n$. Ентропија за овај вектор може бити дефинисана као:

$$H(w_j) = - \sum_{i=1}^m a_{ij} \ln(a_{ij}), j = 1, \dots, n. \quad (5.28)$$

У информационој теорији ентропија $H(w_j)$ може бити дефинисана као дискрециона мера насумичне варијабле несигурности X , чија вредност припада коначном скупу вредности (x_1, x_2, \dots, x_n) , тако да вероватноћа да ће X бити једнако x_j представља w_j и може бити одређена као:

$$P(X = x_j) = w_j \quad (5.29)$$

У контексту мултикритеријума ентропија се углавном користи за одређивање приоритета алтернативе. Приоритет p_i , у складу са процедуром датом за пондере w_j , може се тумачити као вероватноћа да ће доносилац одлуке преферирати њих алтернативу. Једна од најважнијих карактеристика ентропије је да је $H(X) \geq 0$. Ентропија дискретне расподеле са коначним ослоном увек има ненегативну вредност. Може бити једнако нули када су сви елементи у једначини (5.28) једнаки нули. Такав случај је могућ само када једна вредност дискретне случајне променљиве има вероватноћу једнаку један, а истовремено све остале вредности имају вероватноће једнаке нули. Описана ситуација искључује неизвесност. Ентропија постиже максималну вредност униформне расподеле представљену следећом једначином:

$$H(1/n, \dots, 1/n) = \ln(n) \quad (5.30)$$

Ова карактеристика ентропије у складу је са дефиницијом ентропије као мере неизвесности, што значи да је максимум достигнут када све вредности случајне варијабле X имају једнаку вероватноћу.

5.3.3 Метод агрегације у одређивању пондера

Ради проналажења најприкладније методологије за MCDM, чија је присутност неопходна за предложени модел стратешког планирања, полазимо од општег вишекритеријумског модела анализе:

$$A = \begin{matrix} & C_1 & \dots & C_n \\ & \omega_1 & \dots & \omega_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad (5.31)$$

у коме је неопходно проценити једну од m алтернатива ($A_i, i = 1, 2, \dots, m$), у складу са n различитих критеријума који су релевантни ($C_j, j = 1, 2, \dots, n$). Важност сваког од критеријума C_j одређена је помоћу пондерских коефицијената w_j , при чему се вредности критеријума алтернатива могу означити као a_{ij} . Без обзира на методу која се користи за њихово одређивање или израчунавање, све релативне тежине у моделу мултикритеријумског доношења одлука (MCDM) морају задовољити следеће захтеве:

$$0 \leq w_j \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1.$$

За решавање овог модела постоји неколико таксономија али као што је наведено, врло је важно да се након одабира конкретног модела одабере и одговарајућа метода пондерисања критеријума за претходно изабрану методу.

Класификација развијених критеријума метода пондерисања може се извршити на неколико начина. У складу са важношћу критеријума, која не зависи од класификације, обично се подразумева да се критеријуми упоређивања или рангирања примењују при одређивању тежине критеријума. Тако се, на пример, методе могу разликовати по броју учесника у процесу пондерисања када се на теоријске концепте примењују различите индивидуалне или групне методе, односно када се статистичке и алгебарске методе разликују на основу концепта компензације или размене међу критеријумима. Тада су могуће методе подељене на компензационе или некомпензационе методе комбиновања појединачних тежинских критеријума, као што је приказано у раду (Памучар, Стевић, & Завадскас, 2018).

У савременој литератури методе одређивања тежинских критеријума могу се поделити на више начина: алгебарске и статистичке, декомпозиционе и холистичке, директне и индиректне, компензационе и некомпензационе. Код алгебарских метода решавања свих n тежина се израчунава на основу скупа од $n - 1$ одлука решавањем одговарајућег система једначина. С друге стране, статистички поступци користе регресиону анализу редувантних скупова, тј. одлука. Декомпозиционе процедуре се заснивају на упоређивању пара критеријума један-на-један, док у холистичким методама доносилац одлуке, при изражавању преференција, разматра критеријуме и варијабле и врши

свеобухватну процену варијабли. У директним методама доносилац одлука упоређује два критеријума користећи релациону скалу, док у индиректним методама, на основу преференција, доносиоци одлука израчунавају тежину критеријума. У литератури се често могу наћи различито конструисане методологије за агрегацију субјективних и објективних метода. Интеграција индивидуалних преференција доносиоца одлука помоћу пондерисања АНР критеријума може се извршити коришћењем различитих математичких приступа, који се могу сврстати у четири групе (Kwiesielewicz, 2003).

5.3.4 Модел стратешког планирања

Проблем са избором локације производних капацитета намењених одрживом локалном економском развоју јесте проблем у коме је неопходно упоредити неколико локација (алтернатива) на основу одређеног броја одредница локација (критеријума). Неке од њих се могу разматрати на локалном нивоу, док некимa управља република. Притом, треба водити рачуна да се, у односу на сваки појединачни случај, могу разликовати преференције, односно могу постојати критеријуми који имају различит значај. Стога је очигледно да се овај проблем може решавати као класични проблем мултикритеријумског доношења одлука (NALED Website).

Аутор приказаног модела бира алгебарски приступ како би одлучио који од модела би се могао применити за решавање ВFC и LBFC процеса у моделу за планирање **локалног економског развоја** (LER): Ако је агрегациони пондер сваког критеријума добијеног АНР методом $Z_i, i = 1, \dots, n$ на други пондер добијен употребом метода ентропије за пондере $w_i, i = 1, \dots, n$ (Jahan, Mustapha, Sapuan, Ismail, & Bahraminasab, 2012), онда је:

$$\alpha_i = \frac{z_i w_i}{\sum_{i=1}^n z_i w_i}, i = 1, \dots, n \quad (5.32)$$

Ако је агрегациони пондер сваког критеријума добијен пондерисањем АНР методом $Z_i, i = 1, \dots, n$, а други пондер добијен коришћењем ентропијске методе $w_i, i = 1, \dots, n$ (Jahan, Mustapha, Sapuan, Ismail, & Bahraminasab, 2012), онда је:

$$\alpha_i = \frac{\sqrt{z_i w_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{z_i w_i}}, i = 1, \dots, n \quad (5.33)$$

Национална алијанса за локални економски развој (НАЛЕД) увела је, применила и активно спроводи процедуру сертификације повољног пословног окружења (ВFC) у Србији више од десет година. Резултати су врло конкретни и имају позитивне импликације на побољшање опште пословне климе у Србији. Скоро половина свих јединица локалне самоуправе узела је учешће у програму и унапредила своје пословно окружење кроз овај програм сертификације. Критеријуми за сертификацију пружају јединствене смернице

јединицама локалне самоуправе о врсти и квалитету услуга, информацијама које треба да пружи, као и инфраструктури за коју инвеститори и локалне пословне заједнице сматрају да локалне самоуправе треба да пружи.

Локална самоуправа, која је део процеса сертификације, добија посебне препоруке за реформе управљања које је неопходно реализовати у циљу стварања повољног и побољшаног пословног окружења и инвестиционог амбијента на локалном нивоу. Позитивно пословно окружење укључује транспарентну локалну управу, ефикасну администрацију, одговарајућу инфраструктуру и велике стратешке развојне одлуке донете у партнерству са пословном заједницом. Крајњи циљ процеса сертификације је повећање конкурентности појединачних локалних самоуправа, што доприноси конкурентности на националном нивоу, као и промоција и привлачење инвестиција, стварање запослења и повећање животног стандарда и квалитета живота у Републици Србији (Стојановић, В.; Станковић, Ј.; Рањеловић, М., 2012).

Процес сертификације прилагођаван је, побољшаван и прошириван годинама, али је углавном укључивао 12 критеријума и од 80 до више од 100 поткритеријума према којима су локалне самоуправе и независни стручњаци ангажовани од стране НАЛЕД-а могли да процене да ли и до које мере ЈЛС испуњава стандарде пријатељског пословног окружења (Рањеловић, М.; Недељковић, С.; Јовановић, М.; и сар., 2020):

- (C₁) стратешко планирање LER у партнерству са предузећима;
- (C₂) посебно одељење задужено за LER, промоцију SDI и пословну подршку – канцеларија за LER;
- (C₃) пословни савет за економска питања – саветодавно тело градоначелника и локалних самоуправа;
- (C₄) ефикасан и транспарентан систем за добијање грађевинских дозвола;
- (C₅) економски подаци и информације релевантне за покретање и развој предузећа;
- (C₆) вишејезични маркетиншки материјал и интернет страница;
- (C₇) уравнотежена структура буџетских прихода/управљање дугом;
- (C₈) улагање у развој локалне радне снаге;
- (C₉) сарадња и заједнички пројекти са локалним предузећима на подстицању LER;
- (C₁₀) одговарајућа инфраструктура и поуздане комуналне услуге;
- (C₁₁) транспарентне политике о локалним порезима и подстицајима за пословање
- (C₁₂) електронска комуникација и електронске (онлајн) услуге.

Према НАЛЕД-у, значај критеријума у процесу сертификације локалних самоуправа са повољним пословним окружењем у Републици Србији дефинисан је као просечна оцена претходног нивоа оцењивања, а може се дефинисати и као релативна важност посматраних критеријума C_j (колона под називом НАЛЕД која садржи процене важности критеријума у табели). Резултати који се односе на ниво испуњености свих посматраних критеријума за пет конкретних градова у Републици Србији, који нису именовани, приказани су у наредној Табели 5.8.

Табела 5.8. Ниво испуњења критеријума ЈЛС у којима је истраживање спроведено по ВФС програму

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	Просек
NALED	1,25	1,05	0,95	0,90	0,66	1,00	0,80	1,10	1,25	0,85	0,75	1,15	
JLS 1	0,80	1,00	1,00	0,73	0,88	1,00	1,00	0,73	0,64	0,83	1,00	1,00	0,88
JLS 2	0,63	0,95	0,80	0,94	0,86	1,18	0,90	0,75	0,67	0,94	0,93	1,00	0,88
JLS 3	0,90	0,82	0,88	1,00	0,95	1,00	1,00	0,70	0,68	0,76	1,00	0,75	0,87
JLS 4	1,00	0,62	1,00	0,78	0,60	0,67	1,00	0,60	0,59	0,98	0,83	1,00	0,81
JLS 5	1,00	1,00	0,75	0,94	0,90	0,94	1,00	0,87	0,91	0,79	1,00	1,00	0,93

5.3.4.1 Одређивање тежина критеријума применом АНР методе

Користећи процену важности критеријума коју је дефинисао НАЛЕД (Ранђеловић, М.; Недељковић, С.; Јовановић, М.; и сар., 2020), на основу парног поређења формулисана је реципрочна матрица (Табела 5.9). На основу парног поређења, реципрочне матрице и алгоритма из АНР методе израчунат је вектор приоритета, док се применом горе описаног поступка израчунавања ентропије могу се утврдити пондери за критеријуме.

Одређивање тежине критеријума w_j , $j = 1, 2, \dots, 12$ врши се кроз три корака помоћу коефицијената a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, 5$; $j = 1, 2, \dots, 12$ из Табеле 5.6. У првом кораку нормализација вредности критеријума варијабли се врши помоћу стандардне познате формуле:

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}, i = 1, 2, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, 12 \quad (5.34)$$

Заокружене вредности за $j = 1, 2, \dots, 12$ дате су у Табели 5.8 као колона са називом *Важност^{sub}*.

Табела 5.9. Парно поређење критеријума

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
C_1	1	3	4	4	8	3	6	2	1	5	6	2
C_2	1/3	1	2	3	6	1	4	1	1/3	3	4	1/2
C_3	1/4	1/2	1	1	5	1	3	1/2	1/4	2	4	1/3
C_4	1/4	1/3	1	1	4	1/2	2	1/3	1/4	1	3	1/4
C_5	1/8	1/6	1/5	1/4	1	1/5	1/3	1/6	1/8	1/4	1/2	1/7
C_6	1/3	1	1	2	5	1	3	1/2	1/3	3	4	1/2
C_7	1/6	1/4	1/3	1/2	3	1/3	1	1/4	1/5	1	2	1/5
C_8	1/2	1	2	3	6	2	4	1	1/2	4	5	1
C_9	1	3	4	4	8	3	5	2	1	5	6	2
C_{10}	1/5	1/3	1/2	1	4	1/3	1	1/4	0.2	1	2	1/4
C_{11}	1/6	1/4	1/4	1/3	2	1/4	1/2	1/5	1/6	1/2	1	1/5
C_{12}	1/2	2	3	4	7	2	5	1	1/2	4	5	1

Квантитет информација сваког критеријума C_j може се измерити као вредност ентропије на основу једначине:

$$e_j = -k \sum_{i=1}^5 r_{ij} \ln r_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 5; \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad (5.35)$$

Приметимо да константе $k = 1/\ln(n)$ омогућавају да се све вредности e_j налазе унутар интервала $[0,1]$. Затим се одређује степен одступања d_j у односу на просечну количину информација које су садржане у сваком критеријуму применом једначине:

$$d_j = 1 - e_j, \quad j = 1, 2, \dots, 12, \quad (5.36)$$

где d_j представља елементарни интензитет контраста критеријума C_j . Што је веће одступање вредности почетног критеријума варијабле a_i за неки критеријум C_j , то ће и вредност датог критеријума C_j бити већа. Самим тим, закључујемо се да је и важност критеријума C_j за тај проблем одлучивања већа. С друге стране, уколико све варијабле имају приближно једнаке вредности степена дивергенције унутар одређеног критеријума, тај критеријум имаће мањи значај у самом проблему одлучивања. Најзад, у случају када су све вредности варијабли одређеног критеријума једнаке, онда се тај критеријум се може изоставити, јер не даје никакве нове информације. С обзиром да вредност d_j представља специфичну меру тзв. интензитета контра-критеријума C_j , у трећем кораку АНР методе се може извршити њена адитивна нормализација:

$$\omega_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}, \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad (5.37)$$

Добијени резултати за $j = 1, 2, \dots, 12$ представљени су у Табели 5.10. као колона са називом *Важност^{obj}*.

Табела 5.10. Релативна важност критеријума одређених помоћу субјективног приступа употребом АНР и објективног приступа употребом ентропијске методе

Критеријум	Важност ^{sub}	Важност ^{obj}
C ₁	0,191	0,12
C ₂	0,091	0,10
C ₃	0,060	0,02
C ₄	0,046	0,05
C ₅	0,015	0,14
C ₆	0,075	0,10
C ₇	0,030	0,12
C ₈	0,112	0,07
C ₉	0,189	0,19
C ₁₀	0,036	0,03
C ₁₁	0,022	0,02
C ₁₂	0,130	0,03

Ради израчунавања важности критеријума у овој студији случаја разматране су две методе агрегације:

- а) У случају када се агрегациона (збирна) тежина сваког критеријума добија као производ процењивача пондерисања, тј. АНР методом ($w_i^{sub} = Z_i, i = 1, \dots, 12$), а нормализована просечна тежина добија методом ентропије ($w_i^{obj} = w_i, i = 1, \dots, 12$), онда је према једначини (5.32):

$$\omega_i^{sub} = \alpha_i = \frac{z_i \omega_i}{\sum_{i=1}^n z_i \omega_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 12. \quad (5.38)$$

- б) Када се агрегациона тежина критеријума добија у облику нормализоване геометријске средине ентитета за пондерисање, тј. применом АНР метода ($w_i^{sub} = Z_i, i = 1, \dots, 12$), док су нормализоване просечне тежине добијене применом метода ентропије ($w_i^{obj} = w_i, i = 1, \dots, 12$), онда је према (5.33):

$$w_i^{obj} = \alpha_i = \frac{\sqrt{z_i w_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{z_i w_i}}, \quad i = 1, \dots, 12. \quad (5.39)$$

Резултати добијени приступом агрегације (а), као и помоћу агрегације (б), тј. помоћу једначина (5.38) и (5.39) приказани су Табелом 5.11. Приметимо да резултати дати у Табели 5.10 у поређењу са резултатима добијеним методама агрегације датим у Табели 5.11. практично указују на то да у процесу сертификације повољног пословног окружења градова у Републици Србији треба ипак користити интегрисану методу која користи нормализовану геометријску средину, као једну од могућих пондерисаних субјеката, и нормализоване просечне тежине добијене другом методом.

Табела 5.11. Релативна важност критеријума одређена агрегацијом (a) и агрегацијом (b)

Критеријум	Важност α_i (w^{sub})	Важност α_i (w^{obj})
C_1	0,23	0,16
C_2	0,09	0,10
C_3	0,01	0,04
C_4	0,03	0,05
C_5	0,03	0,06
C_6	0,08	0,10
C_7	0,04	0,07
C_8	0,08	0,09
C_9	0,36	0,26
C_{10}	0,01	0,04
C_{11}	0,04	0,02
C_{12}	0,04	0,07

На основу датог истраживања пондерисања вредности тежина критеријума у наставку је дат поступак подешавања одређивања важности критеријума за избор најповољнијег пункта за масовну имунизацију. Први корак подразумева израчунавање збира вредности свих елемената у датим колонама Табеле 5.9, што је представљено као нови ред у Табели 5.12.

Табела 5.12. Укупан збир вредности елемената по колонама

	Локација	Људство	Унутрашња инфраструктура
Локација	1	7	3
Људство	1/7 (0,14)	1	1/7 (0,14)
Унутрашња инфраструктура	1/3 (0,33)	7	1
Σ	1,47	8,2	9,0

Дељењем свих елемената поједине колоне са збиром посматране колоне добијамо нове вредности за матрицу, на начин приказан у Табели 5.13.

Табела 5.13. Вредности елемената након дељења са збиром

	Локација	Људство	Унутрашња инфраструктура
Локација	0,680	0,854	0,333
Људство	0,095	0,122	0,555
Унутрашња инфраструктура	0,224	0,024	0,111

Израчунавањем збира свих елемената добијамо нове вредности за матрицу (Табела 5.14).

Табела 5.14. Укупан збир вредности елемената по колонама

	Локација	Људство	Унутрашња инфраструктура	w
Локација	0,680	0,854	0,333	1,867
Људство	0,095	0,122	0,555	0,772
Унутрашња инфраструктура	0,224	0,024	0,111	0,359
Σ	1,000	1,000	1,000	1,000

Тежина критеријума (у истраживању означеним као C_1, C_2, C_3) израчуната на основу процене оперативног тима за имунизацију дата је у колони **Важност^{sub}**, док је њихова вредност израчуната коришћењем ентропије дата у колони **Важност^{obj}**:

Табела 5.15. Релативна важност критеријума помоћу субјективног и помоћу објективног приступа за избор најповољнијег пункта

Критеријум	Важност ^{sub}	Важност ^{obj}
C_1	1,867	0,263
C_2	0,772	0,584
C_3	0,359	0,153



Слика 5.12. Графички приказ важности критеријума за одлучивање по различитим вредностима

Релативна важност критеријума употребом обе методе агрегације $\alpha_i (w^{sub})$ и $\alpha_i (w^{obj})$, може се видети и у табели 5.16,а графички приказ на слици 5.13.

Табела 5.16. Релативна важност критеријума одређена агрегацијом (а) и агрегацијом (б) за избор најповољнијег пункта

Критеријум	Важност α_i (w^{sub})	Важност α_i (w^{obj})
C_1	0,49	0,44
C_2	0,45	0,42
C_3	0,06	0,15



Слика 5.13. Графички приказ важности критеријума за одлучивање по вредностима агрегације

5.4 СТУДИЈА СЛУЧАЈА ПРИМЕНЕ МОБИЛНЕ ПЛАТФОРМЕ ЗА ПОВЕЋАЊЕ БЕЗБЕДНОСТИ ГРАЂАНА У БОРБИ СА ВИРУСОМ

Данас се информационе технологије брзо и стално развијају. Немогуће је замислити наш свакодневни живот без употребе ових технологија. Убрзани развој мобилних оперативних система, попут Андроида и iOS-а, променио је начин коришћења мобилних телефона. Мобилни телефон се користи не само за телефонирање и слање порука већ има и многе нове и паметне функције. Неке од ових функција омогућавају дељење и праћење локације, што значи моћан и ефикасан алат који треба користити опрезно због осетљивих информација као што је поменута локација (Athanasopoulou & Koutsakis, 2015). С друге стране, људи у последње време живе брже. Уопштено говорећи, људи се свакодневно могу суочити са многим неочекиваним ситуацијама, попут несреће, крађе и криминалне радње. На срећу, људи увек код себе имају мобилне телефоне, па се могу осећати сигурније. Тако могу брзо деловати у хитним ситуацијама и спасити своје животе. Будући да је Андроид најчешће коришћен ОС за мобилне уређаје (Yan, Cosgrove, Anand, et al., 2016; Yan, Dantu, Ko, Vitek, & Ziarek, 2017; Soorki, M. N.; Manshaei, M. H.; Saad, W. et al., 2017), постоје многе развијене и специјализоване апликације за његову једноставну употребу.

Последњих година мобилне апликације и мобилне услуге постале су један од главних технолошких трендова. Андроид апликације постају пуноправни алат за решавање различитих свакодневних задатака. Недавно су многи истраживачи покушали да пронађу право решење за безбедносни проблем у случају хитности, али није пронађено одговарајуће решење. Апликација која решава проблем локације на путевима представљена је у раду (Zulkafi, Basri, Jung, & Ahmad, 2016). Основна идеја ове апликације је да упозори возача да се приближава опасној кривини и помогне му да успори и припреми га за скретање. Апликација обавештава возача о опасној кривини 700 метара пре оштрог скретања. Упозорење се спроводи пуштањем звука „зујања“ – информација возачу да наилази на опасну кривину. Такође, овај систем ће дати предлог најближих локација хитних служби само ажурирањем листе локација и означавањем локација хитних служби на карти. Техника добијања тачне локације која се користи у овој апликацији је врло слична оној која се користи у нашој предложеној апликацији. Осим тога, постоји слична апликација под називом *bSafe* (*bSafe Android app*, 2018). Ова Андроид апликација пружа више од једне опције кориснику, као што су:

- Опција *bSafe Alarm* – врши слање СМС-а са локацијом корисника, али се осим локације могу слати и аудио и видео подаци заједно са подацима о локацији. Када је ова опција активирана, активира се аутоматско снимање и снимљени подаци се шаљу на жељене бројеве. У овој апликацији корисник може да дефинише пријатељски циклус који садржи онолико бројева колико корисник жели, а ти бројеви се могу мењати неограничен број пута.
- Опција *Follow me* – прати локацију корисника на мапи у реалном времену.
- Опција *Timer Alarm* омогућава кориснику да подеси време за које очекује да стигне до локације, а ако не стигне до локације у задатом временском периоду, биће послата СМС порука са његовом тренутном локацијом.
- Опција *Face Call* врши позивање лица. Када корисник активира ову опцију, упућује се позив лица, што може бити корисно у случају да корисник жели одвратити пажњу од нападача обавештавајући га да постоји неко ко би могао чути ако дође до напада, што би се могло користити као нека врста доказа.

Међутим, ова апликација није интегрисана у било који централизован систем и није корисна у неколико опасних ситуација у којима нема времена за активну употребу мобилног телефона. Апликација (*GoSuraksheit Android app*, 2018) омогућава кориснику мобилног телефона у хитним случајевима да пошаље СМС полицији или центру за спашавање. На сваки захтев координате локације корисника се шаљу на број полицијског центра. Ова апликација може да ради у два режима, мрежном режиму и GPS режиму. Сви

деталји корисника, као што су опис, приоритет и извештај о тренутној локацији, шаљу се на сервер.

Другим речима, ова апликација решава проблем интеграције са централизованим системом како би помогла грађанима, али је такође непримењива у неколико опасних ситуација када жртва не може активно да користи свој мобилни телефон. Укратко, да би се покренуле претходно наведене апликације, потребно је отворити апликацију на мобилном телефону, што је понекад немогуће учинити. Недостаци ових апликација су у томе што нема тастер за хитне случајеве или окидач за брзо и тихо упозорење, чак иако апликација има неку врсту нечујног прекидача, попут вибрације телефона или откривања кретања корисника, што није добро, јер апликација може бити активирана случајно. Осим тога, неке од представљених апликација немају виџет.

5.4.1 Техничко решење мобилне платформе за апликацију SOSerbia

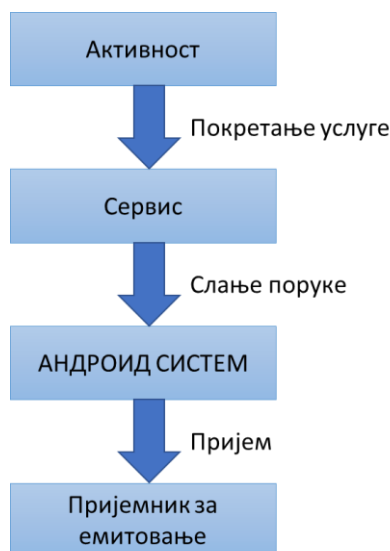
Као што је претходно наведено, проблем у вези са хитним, опасним ситуацијама потенцијално се може решити у одређеној мери. Из наведених разлога у раду (Јовановић, М. и сар., 2018) аутори су представили мобилну платформу засновану на Андроид оперативном систему под називом **SOSerbia**. Њена основна улога јесте слање порука грађана Србије у хитним случајевима. Централни део платформе је Андроид клијентска апликација, која уједно представља једноставно решење за слање СОС порука са јединственом комбинацијом тастера. Предложена платформа је решење за многе безбедносне, сигурносне и хитне проблем за људе који се могу наћи у опасним ситуацијама. Након што особа притисне одговарајућу комбинацију тастера, порука са локацијом те особе се шаље у Оперативни центар полиције Републике Србије. Платформа спаја неколико водећих Андроид технологија које су на одговарајући начин комбиноване у једно потпуно решење. Предложено решење такође користи Google Location API за добијање локације корисника и пријемник за емитовање Media Player-а за читање/репродуковање тастера притиснутих за подешавање јачине звука. Ова логика се такође може прилагодити за било који други мобилни оперативни систем. Другим речима, предложена архитектура се такође може применити на iOS или Windows. Треба напоменути да је предложена архитектура оптимизирана за различите мобилне уређаје. Такође се примењује са једноставним виџетом и позадинским процесом заснованим на локацији.

Предложена платформа је експериментално демонстрирана у оквиру Центра за реаговање у хитним случајевима при Министарству унутрашњих послова Републике Србије. Истакнимо да предложена платформа превазилази стварне проблеме са којима се сусрећу друга најсавременија решења и може се лако применити и интегрисати у било коју

националну полицију и системе еУправе. Слична апликација намењена случајевима у којима не функционише систем мобилних комуникација представљена је у (Tundjungsari & Sabilq, 2017). Предложена апликација користи се на начин да више телефона, на којима је инсталирана ова апликација, стварају ад хок бежичну мрежу сличну мрежи равноправних корисника (енг. *peer-to-peer*). Са једне стране, ова је апликација добра јер у многим случајевима, попут земљотреса и других случајева природних катастрофа, услед оштећења не постоји могућност исправног рада стандардних система комуникација. Међутим, њена основна мана јесте да се ослања на чињеницу да сваки корисник има инсталирану предложену апликацију, што не мора бити случај и то сасвим сигурно смањује ефикасност предложене апликације. Наведена апликација је такође погодна за она места где нема сигнала мобилне комуникације. Због свих горе наведених опција може се закључити да је понуђена апликација добра за коришћење у одређеним ситуацијама, али не може решити проблем слања поруке од стране грађана у невољи. Ако, рецимо, други Андроид телефони у нашој близини не користе ову апликацију, онда је бескорисна, а поруке се шаљу само у кругу заступљености мреже, а осим тога, у већини случајева када дође до хитне ситуације, мобилна мрежа је доступна, па нема потребе за овом апликацијом.

Реализована мобилна платформа ефикасно функционише у ситуацијама у којима жртва не може лако и активно да користи свој мобилни телефон. Може чак да ради и ако је екран поломљен и уређај закључан, а шаље поруке директно у полицијски центар за податке. Овај центар је интегрисан у БигДата центар за еУправу Србије и биће могуће применити напредна решења за анализу када предложена услуга генерише довољну количину података. Цео процес траје неколико секунди, од пријема СОС СМС-а, до тренутка када оперативни центар МУП-а пошаље најближу полицијску патролу. Први корак је слање СОС поруке када је корисник у опасности. Други је обрада података који се шаљу у полицијски дата центар који има базу података повезану са *BigData* центром еУправе Владе Републике Србије. Ова база података садржи списак корисника и тачне локације полицијских патрола у стварном времену, што олакшава израчунавање удаљености најближе патроле. Након овог корака патролу обавештава диспечерски центар где треба да иде. Главни циљ овог процеса је да се смањи време између слања текстуалне поруке и добијања помоћи од полиције. Коришћење предложене апликације обавља се у само неколико корака. Најпре се покреће СМС помоћу тастера, други корак је повезан са базом података и корисницима где се већ зна ко шаље СМС, а трећи је утврђивање локације најближе полицијске патроле према добијеним информацијама о локацији корисника (свака патрола је опремљена GPS предајником). Оператер из полицијског центра за податке треба да саопшти патроли где да иде, и то је једини део који није аутоматизован. Предложена

архитектура клијентске Андроид апликације приказана је на Слици 5.14. Три компоненте које су правилно спојене неопходне су за обезбеђивање доброг протока предложеног решења: активност, услуга и пријемник за емитовање. Активност ступа у интеракцију са корисником па ствара прозор за постављање елемената корисничког интерфејса (*engl. user interface*). Андроид апликација може да садржи неколико активности, што значи да многи различити екрани могу међусобно да делују (Jackson, 2014).



Слика 5.14. Архитектура клијентске Андроид апликације SOSerbia

У предложеном приступу корисник путем приказа у активности шаље захтев за покретање услуге која је одговорна за добијање тренутне локације. Ради појашњења, услуга је компонента која ради у позадини без директне интеракције са корисником и користи се за понављајуће и потенцијално дуготрајне операције. Пошто услуга нема кориснички интерфејс, није везана за животни циклус активности. У предложеној апликацији за клијенте пријемник за емитовање је одговоран за регистрацију системских догађаја и омогућава читање притиснутих тастера за подразумевану комбинацију као Андроид компоненту која вам омогућава да се региструјете за системске догађаје или догађаје у апликацији. *Android runtime* обавештава све регистроване пријемнике за догађај када се овај догађај догоди.

Имплементирано корисничко решење састоји се од ове три компоненте. У фази пуштања апликација СОС такође користи библиотеку клијента Google API за локације (*com.google.android.gms:play-services-location:10.2.6*) да би добила локацију корисника. Услуге *Google API* за локације је најпопуларнија услуга за повећање свести о локацији аутоматским праћењем локације, географским ограђивањем и препознавањем активности. Предложена архитектура клијентске Андроид апликације такође омогућава имплементацију више опција, као што су:

1. окидач за хитне случаје – за слање СМС-а хитним случајевима,
2. окидач за виџет – исто као и претходни, али само за слање када је телефон откључан,
3. шаблон или пин – за отварање и активирање апликације,
4. *time locker* – за подешавање активних сати апликације,
5. СМС даљински управљач: ако апликација прими поруку са унапред одређеног броја са одређеним кодом (#123backup), на пример, покренуће прављење резервне копије података (СМС, слике, видео-записи и документи), корисник ће моћи да изабере шта жели да сачува или отпреми у облак,
6. враћање на фабричко подешавање (енг. *restore*) – у случају да је уређај украден или изгубљен,
7. икона апликације скривена на корисничком екрану,
8. даљински управљач за камеру, са опцијама *укључите камеру, снимите слику са предњом или задњом камером и пошаљите је на унапред дефинисан број*.

Ова СОС апликација је развијена да ради на два начина. Пре свега, услуга је имплементирана тако да има слушаоце за тастере које ће корисник притиснути (подразумевана комбинација за слање СОС поруке). Друго, услуга се примењује када се појави виџет. Када корисник додирне виџет, аутоматски ће послати поруку са својом локацијом и било којим другим подацима ако је услуга персонализована за различите кориснике. Ово је офлајн апликација, што значи да може радити без приступа интернету, па сами тим корисницима пружа боље могућности.

Листа функција и предности уграђених у Android OS је прилично дуга. Главна функционалност прве фазе је слање поруке коју је корисник затражио на основу постојећих услуга имплементираних за слушање и добијање локације. Овај модул на страни клијента обезбеђује интеграцију Google Service API Location и JSON parsera. Са једне стране, са услугама слушања које се користе на страни корисничког интерфејса СОС клијент комуницира овом услугом која је покренута у позадини и извршава задатак лоцирања и покреће пријемник за емитовање медија. С друге стране, постоји виџет који корисник додирује и покреће услугу током овог процеса. Кориснички интерфејс апликације је све што корисник може да види и са њим ступи у интеракцију. Као што је познато, оперативни систем Андроид нуди разне унапред изграђене компоненте корисничког интерфејса, као што су објекти структурираног распореда и контроле корисничког интерфејса, које се могу користити за креирање графичког корисничког интерфејса. Кориснички интерфејс у СОС апликацији имплементиран је у XML-у и углавном користи линеарни распоред (енг. *Linear Layout*). Овај линеарни распоред представља групу приказа која поравнава све наслеђене

елементе у једном смеру, вертикално или хоризонтално, а подржава и додељивање тежине појединачном наслеђеном елементу са атрибутом *layout_weight*. Овај атрибут додељује вредност „важност“ приказу, у смислу колико простора треба да заузме на екрану.

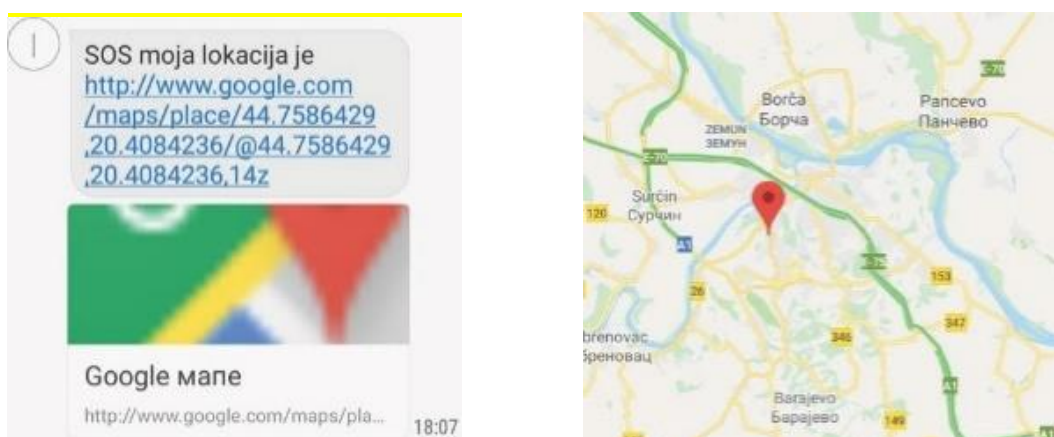
Треба истаћи да су вицети апликације (енг. *AppWidget*) минијатурни прикази апликација који се могу уградити у друге апликације (попут почетног екрана) и примати периодична ажурирања. Ови прикази се у корисничком интерфејсу могу објавити код провајдера вицет апликација. Компонента апликације која може да садржи друге вицете апликација назива се домаћин вицета апликације. У самој СОС апликација користи се *AppWidget* објављен у датотеци манифеста, а имплементиран у класи *CustomAppWidgetProvider*, која проширује класу *AppWidgetProvider*. Такође, класа *CustomAppWidgetProvider* проширује *BroadcastReceiver* као помоћну класу за руковање емитованим порукама *AppWidget*. *AppWidgetProvider* прима емитоване поруке само за догађаје који су специфични за вицет апликације, на пример, када се вицет апликација ажурира, избрише, активира и деактивира.

Реализована клијентска СОС апликација у представљеној мобилној платформи позива следеће методе везане за вицете:

- методу *OnUpdate()* када корисник дода вицет апликацију, па мора да изврши основну конфигурацију, као што је постављање руковаоца догађајима за приказе и покретање привремене услуге, ако је потребно. Међутим, ако је већ декларисана конфигурацијска активност, овај метод се не позива када корисник дода вицет апликације, већ се позива за накнадна ажурирања. Одговорност конфигурацијске активности је да изврши прво ажурирање када се конфигурација заврши.
- методу *OnReceive()* за свако емитовање и пре сваког другог метода повратног позива. Ова метода проверава да ли је локација омогућена. Ако је тако, услуга је покренута. У супротном се приказује излазна порука која упозорава да је локација омогућена у поставкама.

Када дође до ових догађаја емитовања, *AppWidgetProvider* прима позиве метода као што су *OnUpdate()* и *OnReceive()*. Услуга је компонента апликације која представља или жељу апликације да изврши дуготрајније операције без интеракције са корисником или да обезбеди функционалност за рад других апликација. Свака класа услуге мора имати одговарајућу декларацију `<service >` у датотеци *AndroidManifest.xml* у свом пакету. Услуге се могу покренути помоћу *Context.startService()* и *Context.bindService()*. Услуге раде у главној нити њиховог процеса хостинга. У овој апликацији имплементиране су две услуге: услуга волумена и услуга вицета.

Услуга јачине звука једна је од две апликационе услуге. Корисник може покренути и зауставити услугу притиском на једно од ова два дугмета под називом „покрени сервис“ (енг. *Start service*) и „заустави сервис“ (енг. *Stop service*). То се назива услугом јачине звука углавном зато што ова услуга ради у позадини и чека да правилно ухвати комбинацију тастера за јачину звука притиснутих узастопно (у овом конкретном случају имплементације ова комбинација је постављена на високо-ниско-високо-ниско). Ова комбинација притиснутих тастера за јачину звука покреће слање СМС-а. Након покретања услуге морате омогућити услугу локације како би услуга волумена могла послати поруку о локацији корисника у поруци. Основни принцип је да, након што корисник кликне на одговарајућу комбинацију, услуга почиње прикупљањем података о локацији корисника, што обично траје од 1 до 5 секунди (углавном зависи од квалитета везе у време слања SOS СМС-а) и одмах затим шаље поруку са линком до мапе. Након што је порука послата, *volume service* остаје активан ако постане потребно ново слање. Имплементација услуге вицета има скоро исту логику као и услуга јачине звука. Ипак, суштинска разлика је да се услуга вицета покреће помоћу дугмета вицет, након чега се не ослушкује комбинација тастера за јачину звука, већ покреће услуга локације и шаље поруку након што се пронађе тачна локација. Такође, услуга вицета се поништава након слања поруке, јер је њена једина сврха да пошаље поруку на најкраћи могући начин. Дакле, примењени принцип је да услуга шаље поруку о промени локације. Када услуга пронађе локацију, шаље поруку, престаје да ажурира локацију и поништава услугу вицета.



Слика 5.15. Пример SOS хитне поруке са локацијом корисника

Коначни резултат који генерише предложени клијент приказан је на Слици 5.15. Видимо поруку која садржи линк до апликације Google maps са корисничким координатама приказаним као пин. Порука садржи текст у формату: „SOS моја локација – линк до *Google maps*“. Захваљујући овој локацији, корисник који SOS поруку пошаље може бити спасен у

кратком временском периоду. Облик СОС поруке може се лако прилагодити различитим типовима корисника апликација.

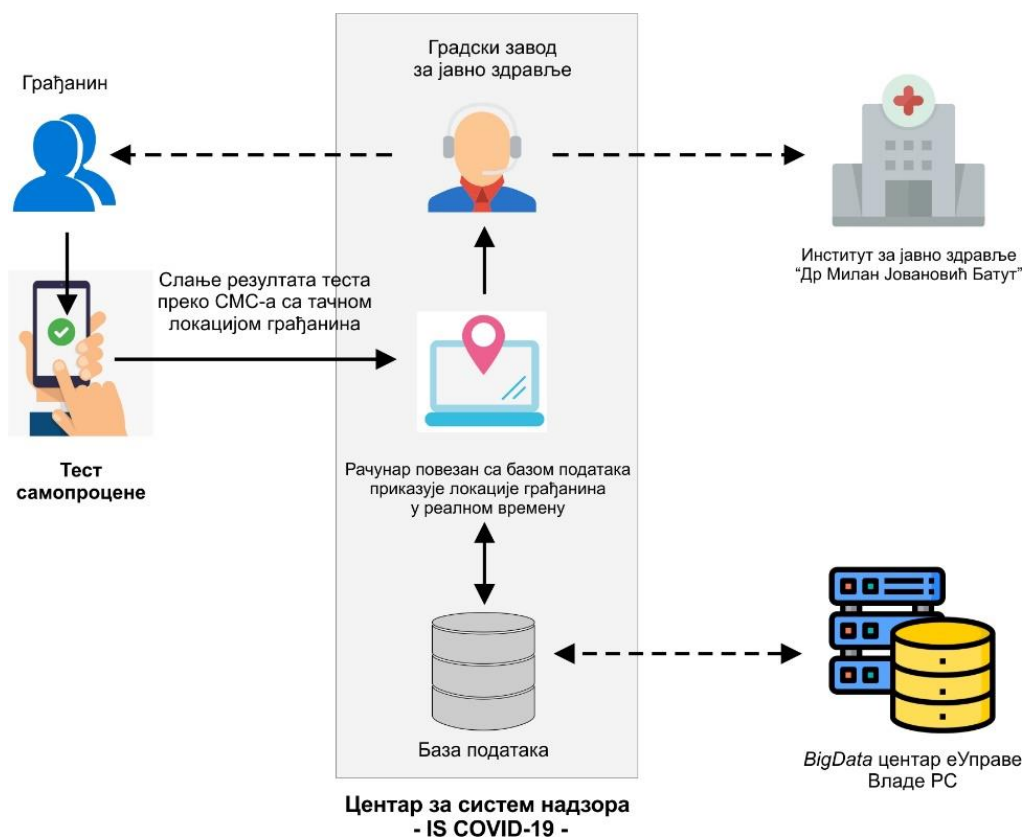
5.4.2 Имплементација мобилне платформе за систем надзора над COVID-19

На Порталу еЗдравље Министарства здравља Републике Србије 1. априла 2020. године постављен је алгоритам који прописује начин поступања са особама за које се оправдано сумња да су заражене вирусом SARS-CoV-2. У ту сврху, Портал *еЗдравље* омогућава да сваки грађанин, попуњавањем одговарајућег упита, може извршити самопроцену на инфекцију вирусом. На основу тога, он добија даља упутства, при чему се такође остварује директна комуникација са одговарајућим надзорним амбулантима. Приступ функцијама портала *еЗдравље* омогућен је након регистрације и пријаве, а може се обавити на следећа три начина:

1. преко података са картице здравственог осигурања;
2. преко Портала еЗдравље;
3. преко eID.gov.rs.

Пријава и регистрација се врши путем јединственог државног система за аутентификацију грађана у порталу еУправе (eID.gov.rs), а на основу другог или трећег нивоа поверљивости аутентификације, омогућава приступ свим функцијама Портала *еЗдравље*. Основна сврха овакве самопроцене, као и питања која се постављају, јесте могућност брзе и ефикасне идентификације свих особа за које се основано сумња на инфекцију вирусом SARS-CoV-2. Приликом давања одговора који се односе на симптоме и потенцијалну изложеност овом вирусу неопходно је да корисник схвати озбиљност и даје искрене одговоре. Након одговора на низ питања која се тичу симптома, прикупљању информација о претходним хроничним болестима, односно постојању потенцијално ризичних контаката, алгоритам сам даје упутство о даљим мерама и начину понашања.

На пример, уколико грађанин пријави да има температуру 38, кашље, губи чула мириса и укуса и има дијареју, онда ће алгоритам саветовати да је „НЕОПХОДНО да се јави надлежној установи“. Поред тога, апликација може да понуди и дом здравља у општини осигураника, као и бројеве телефона дежурних амбуланти. Оно што треба истаћи јесте да тест самопроцене никако не замењује мишљење, преглед или дијагнозу која се врши од стране лекара. На страници на којој се налази тест самопроцене, у горњем десном углу, налази се одељак под називом Потврда негативног или позитивног резултата. Кликком на тај назив отвара се документ у PDF формату – резултат теста какав би пацијент добио иначе у здравственој установи у којој се тестирао.



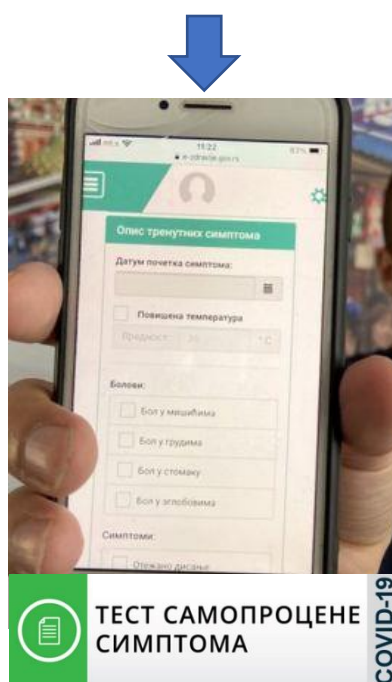
Слика 5.16. Модификација мобилне платформе апликације SOSerbia за потребе система надзора над пандемијом болести COVID-19

Применом наведене мобилне платформе СОС апликације, а ради аутоматизације послова и повећање безбедности самих грађана, предложена је модификација постојеће СОС СМС апликације, на начин приказан на Слици 5.16. Модификација платформе СОС апликације полази од чињенице да особа у опасности може бити сваки грађанин у време пандемије. Представљена СОС апликација омогућава кориснику мобилног телефона да у хитним случајевима пошаље СМС поруку полицији. На сваки захтев преко ове апликације координате локације корисника се шаљу на број полицијског центра. Уместо полицијског центра у доба пандемије податке треба преусмерити на централизован систем „IS COVID-19“, који је формиран у априлу 2020. године ради вршења епидемиолошког надзора. Овај систем је успоставио и води га Институт за јавно здравље Србије „Др Милан Јовановић Батут“ уз одговарајућу техничко-информатичку подршку Канцеларије за информационе технологије и електронску управу, као и Републичког фонда за здравствено осигурање.

Уместо комбинације притиснутих тастера за јачину звука која покреће слање СМС поруке, предложено је да се ова активност аутоматски покрене након завршетка теста самопроцене симптома, односно са добијеном потврдом негативног или позитивног резултата. СМС порука садржи линк до апликације Google maps са корисничким координатама приказаним као пин. Захваљујући овој локацији, систем за надзор може добити повратни СМС или телефонски позив од оператера о доступној најближој ковид

амбуланти у кратком временском периоду. Порука или позив од стране оператера Градског завода за јавно здравље могла би да садржи и идентификациони број заказивања код лекара ради провере симптома. Због остваривања високог нивоа безбедности података на предложеној мобилној платформи размену података би требало остварити применом QR кодова. Аутоматски генерисан QR код, који би грађанин добио после урађеног теста самопроцене, садржао би информације о најближој ковид амбуланти и слободном термину за преглед код лекара (Слика 5.17).

Слика 5.17. Тест самопроцене симптома вируса на мобилној платформи



6 ЗАКЉУЧАК

У овој дисертацији, најпре је приказан и детаљно објашњен начин функционисања *колаборативних веб сервиса Портала електронске управе (еУправ) Републике Србије*. У ту сврху, описана је информационо-комуникациона логистика, као и историјски развој еУправе у Републици Србији. Затим је више пажње посвећено детаљнијој анализи структуре самих веб сервиса унутар еУправе, њеној софтверској подршци, односно различитим моделима комуникације у еУправи и конкретним веб сервисима који се налазе на овом порталу. То је, пре свега, *систем за имунизацију против болести COVID-19*, који у свом саставу садржи низ различитих система и подсистема. Посебно су објашњени подсистеми за праћење вакцина и евиденцију вакцинисаног становништва, подсистем за исказивање интересовања грађана за вакцинацију, односно подсистем за заказивање термина за вакцинацију.

У наредном делу овог рада, дат је приказ основних принципа и чињеница које се односе на *математичко-стохастичко моделовање* реалних појава, података и процеса. Пошло се од дефиниција појма модела, моделовања и симулација, а онда је објашњена подела математичких модела на детерминистичке и стохастичке моделе. Наравно, више пажње је посвећено стохастичком моделовању, па су у истом делу дисертације наведени најважнији појмови теорије вероватноћа као основне математичке дисциплине која управо даје теоријску основу за формирање низа различитих математичко-стохастичких модела. У тесној вези са теоријом вероватноће је и (математичка) статистика, која такође користи стохастичке алате у статистичком изучавању и моделовању реалних појава и процеса. Најзад, управо „спајањем“ ових двеју дисциплина могуће је формирати посебну научну област која се бави *случајним (стохастичким) процесима*, односно временским серијама (низовима) података који се могу стохастички моделовати са временског аспекта.

Користећи претходно изложене принципе математичко-стохастичког моделовања, пето поглавље ове дисертације приказује различите облике и поступке експерименталних истраживања, односно студије случаја које се односе на оптимизацију постојећих, али и стварање нових, побољшаних решења ради успешне имунизације становништва на територији Републике Србије. Реч је о тзв. студијама случаја, заснованим на принципима математичко-стохастичког моделовања, а које су примењене унутар следећа четири важна аспекта експерименталних истраживања:

1. Применом *модела регресионе и корелационе анализе* утврђена је најпре регресиона зависност броја вакцинисаних лица у односу на број инфицираног становништва. Тако је указано да постоји квантитативна зависност ових двеју појава, те да се повећањем броја

вакцинисаног становништва може значајно смањити број инфицираних лица. Затим је показано да се укупан ниво степена имунизације може моделовати тзв. *Гомпрецовом логистичком функцијом*, чиме се може извршити дугорочна прогноза (екстраполација) броја имунизованог становништва.

2. Применом *нелинеарних стохастичких модела*, односно тзв. модела *GSB процеса*, у другој студији случаја је описана динамика степена имунизације у временском периоду од 24.12.2020. године (почетак имунизације у Републици Србији), па до 6.6.2022 године. Притом је уочено да сама динамика имунизације поседује карактеристике случајних процеса са перманентним и наглашеним флукуацијама. Самим тим, показано је да GSB процес може бити адекватан стохастички модел којим се оваква динамика може у потпуности описати.

3. Применом *модела вишекритеријумског одлучивања*, извршен је поступак одређивања важности критеријума за избор најповољнијег пункта за масовну имунизацију. Такође, вишекритеријумски модели за оцену критеријума у којима се користе тзв. методе агрегације коришћени су за израчунавање релативне важности критеријума код избора најповољнијег пункта. Вредности објективних критеријума представљају утицај сваког појединачног критеријума, док субјективне тежине могу указати на њихову важност у смислу рационалности разматраних алтернатива, што у датим околностима, када треба донети брзу одлуку, а игра велику улогу.

4. Предложена је *мобилна платформа за повећање безбедности* здравља људи у ванредним ситуацијама (као што је глобална пандемија) на начин да је извршена модификација постојећег СОС сервиса на мобилној платформи Андроид оперативног система. Предложена архитектура оптимизирана је за различите мобилне уређаје, а захваљујући корисничким координатама (локацији) након завршеног теста самопроцене симптома, од система за надзор може се добити повратни СМС о доступној најближој ковид амбуланти у најкраћем временском периоду. Овако би сваком грађанину, уз примену једноставних и лако доступних апликација, било омогућено да на безбедан начин изврши размену података са центром за систем надзора уз аутоматски генерисан QR код, који садржи информације о најближој ковид амбуланти и слободном термину за преглед код лекара.

На крају треба истаћи да је пандемија изазвана вирусом SARS-CoV-2 донела комплетну промену у животима људи широм света. Криза изазвана пандемијом, нас је уверила колики значај има дигитализација у Републици Србији, односно стварање ефикасне и функционалне јавне управе. Том циљу су итекако помогла многобројна информациона

решења чија је основна намена да се грађанима у што већој мери олакша приступ и коришћење јавних сервиса еУправе.

Глобални изазов за здравље људи као што је пандемија *COVID-19* захтева примену мера за спречавање и сузбијање заразних болести које су владе скоро свих земаља морале да донесу. Поред основних неопходних мера за спречавање преношења *COVID-19* инфекције, најефикаснији и најбезбеднији начин у борби против болести јесте била и вакцинација. Међутим, како би се брже постигао колективни имунитет, а самим тим стекао услов да се заразна болест искорени, од непроцењивог значаја су били предузети кораци у праћењу односно предвиђању броја вакцинисаног становништва кроз математичке моделе, затим кораци у доношењу рационалних стратешких одлука, као и кораци у примени савремених мобилних платформи доступних свим грађанима. У којој мери су предузету кораци, а уједно и циљеви ове дисертације били важни, надамо се да ће време у будућим евентуалним сличним ситуацијама само показати.

7 ЛИТЕРАТУРА

- „Службени гласник РС“, бр. 27/2018.
- „Службени гласник РС“, бр. 6/2016.
- „Службени гласник Републике Србије“, бр. 94/2017.
- „Службени гласник РС“, бр. 107/15.
- „Службени гласник РС“, бр. 85/2020.
- „Службени гласник РС“, бр. 87/2018.
- „Службени гласник РС“, бр. 9/2014, 42/2014 и 54/2018.
- Almeshal, A. M., Almazrouee, A. I., Alenizi, M. R., & Alhajeri, S. N. (2020). Forecasting the Spread of COVID-19 in Kuwait Using Compartmental and Logistic Regression Models. *Applied Sciences*, 10, Article No. 3402.
- Alqahtani, R., Musa, S., & Yusuf, A. (2022). Unravelling the dynamics of the COVID-19 pandemic with the effect of vaccination, vertical transmission and hospitalization. *Results in Physics*, 34, Article No. 105715.
- Alqahtani, P. T., Musa, C. C., & Yusuf, A. (2022). Unravelling the dynamics of the COVID-19 pandemic with the effect of vaccination, vertical transmission and hospitalization. *Results in Physics*, 39, Article No. 105715.
- Alruwaie, M., & cap. (2012). A Framework for Evaluating Citizens' Expectations and Satisfaction toward Continued Intention to Use E-Government Services, from book: *Electronic Government. 11th IFIP WG 8.5 International Conference, EGOV 20*.
- Alvarado, M., & други. (2007). Decision making on pipe stress analysis enabled by knowledge-based systems. *Knowledge and Information Systems: An International Journal*, 12(2), 255-278.
- Anderson, R., & Vastag, G. (2004). Causal modelling alternatives in operations research: overview and application. *European Journal of Operational Research*, 156(1), 92- 109.
- Athanasopoulou, G., & Koutsakis, P. (2015). eMatch: an android application for finding friends in your location. *Mobile Information Systems*, Article ID 463791.
- BBC News (на српском)*. (2020). Преузето са B92 Info:
https://www.b92.net/bbc/index.php?yyyy=2020&mm=11&dd=16&nav_id=1671403
- BEACON COVID-19 RESPONSE*. (.). Преузето са Social Distancing & Protective Measures:
<https://coronavirus.beaconhealthsystem.org/getting-back-to-business/>
- bSafe Android app*. (2018, October). Преузето са
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.bipper.app.bsaf&hl=en>.

- Byung, K. (2003). Meta Web service: building Web-based open decision support system based on Web services. *Expert Systems with Applications*, 24, 375-389.
- Cao, L., Shi, P.-J., Li, L., & Chen, G. (2019). A New Flexible Sigmoidal Growth Model. *Symmetry*, 11, No. 204.
- Chan, K., & други. (2007). *A Fault Taxonomy for Web Service Composition*. Lecture Notes in Computer Science: Service-Oriented Computing - ICSOC 2007 Workshops.
- Consoli, S., & Recupero, D. R. (2021). *Data Science for Economics and Finance: Methodologies and Applications*. Switzerland AG: Springer Nature.
- Engle, R. F., & Smith, A. D. (1999). Stochastic Permanent Breaks. *The Review of Economics and Statistics* 81, 553-574.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. New York: John Wiley & Sons.
- Gonzalo, J., & Martinez, O. (2006). Large shocks vs. small shocks. (Or does size matter?). *Journal of Econometrics*, 135, 311–347.
- Gonzalez, A. (2004). *A Smooth Permanent Surge Process*. Stockholm: SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance No. 572.
- GoSuraksheit Android app. (2018, October). Прейзери са <https://go-uraksheit.soft112.com/>
- Hafner, C. M. (1998). Durations, Volume and Prediction of Financial Returns in Transaction Time High Frequency Data. *Symposium on Microstructure and*. Paris.
- Hamilton, D. J. (1994). *Time Series Analysis*. New Jersey,: Princeton University Press.
- Huang, B.-N., & Fok, R. C. (2001). Stock market integration - an application of the stochastic permanent breaks model. *Applied Economics Letters*, 8(11), 725–729.
- Ibrahim, B., & Ali, A. (2019). Ranking the Libyan airlines by using Full Consistency Method (FUCOM) and Analytical Hierarchy Process (AHP). *Oper. Res. Eng. Sci. Theory Appl.*, 2, 1–14.
- Ivanov, M. (2019). Web Services: Features, Technologies and Applications. *Proceedings of the International Conference InfoTech*, (стр. 156-165).
- Jackson, W. (2014). *Pro Android UI*. Apress.
- Jahan, A., Mustapha, F., Sapuan, S., Ismail, Y., & Bahraminasab, M. (2012). A framework for weighting of criteria in ranking stage of material selection process. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 58, 411–420.
- Kaklauskas, A., Zavadskas, E., & Trinkunas, V. (2007). A multiple criteria decision support online system for construction. *Engineering Application of Artificial Intelligence*, 20(2), 163-175.
- Kapetanios, G., & Tzavalis, E. (2010). Modeling structural breaks in economic relationships using large shocks. *J. Econom. Dynam. Control*, 34(3), 417–436.

- Kouamé, K.-M., & Mcheick, H. (2021). An Ontological Approach for Early Detection of Suspected COVID-19 among COPD Patients. *Appl. Syst. Innov.*, 4, Article No. 21.
- Kreger, H. (2001). *Web Services: Conceptual Architecture*. IBM Software Group.
- Kwiesielewicz, M. P. (2003). Evaluating Attribute Significance in AHP Using Shannon Entropy,. *ISAH*. Bali, Indonesia.
- Lawrence, A. J., & Lewis, P. A. (1992). Reversed Residuals in Autoregressive Time Series Analysis. *Journal of Time Series Analysis*, 13, 253-266.
- Lee, S. L., & Mallick, B. (2020). Estimation of COVID-19 spread curves integrating global data and borrowing information. *PLoS ONE*, 15(7), e0236860.
- Leskinen, P. (2000). Measurement scales and scale independence in the Analytic Hierarchy Process. *J. Multi-Criteria Decis. Anal.*, 9, 163–174.
- Lindsey, J. K. (2003). *The Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time*. Dierenpebeek and Ulg Liége: LUC.
- Ma, J., & Zhang, Q. (1991). 9/9-9/1 scale method of the AHP. *Proceedings of the 2nd International Symposium on the AHP* (стр. 197–202). Pittsburgh: University of Pittsburgh: PA.
- NALED Website*. (.). Прейзето November 16, 2018 ca <http://www.naled-serbia.org/>
- Ntulo, G., & Otike, J. (2013). *E-Government: Its Role, Importance and Challenges*. MoiUniversity: School of Information Sciences.
- Olofsson, M., Ericson, T., & Forchheimer, R. (2004). Linear filters. *Y Telecommunication Methods*. Linköping: Linköpings University.
- Ozdemir, S. (2018). *Principles of Data Science (Second Edition)*. Birmingham-Mumbai: Packt Publishing.
- Power, D. J. (2002). *Decision Support Systems, Concepts and Resources for Managers*. Westport, Conn: Quorum Books.
- Queirós-Reis, L. i sarad. (2021). SARS-CoV-2 Virus–Host Interaction: Currently Available Structures and Implications of Variant Emergence on Infectivity and Immune Response. *Int. J. Mol. S*, 22, Article No. 10836.
- Queirós-Reis, L., Gomes da Silva, P., Gonçalves, J., Brancale, A., Bassetto, M., & Mesquita, J. (2021). SARS-CoV-2 Virus–Host Interaction: Currently Available Structures and Implications of Variant Emergence on Infectivity and Immune Response. *Int. J. Mol. Sci.*, 22, Article No. 10836.
- Richards, F. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of experimental Botany*, 10(2), 290–301.

- Rossi, C., Bonanomi, A., & Oasi, O. (2021). Psychological Wellbeing during the COVID-19 Pandemic: The Influence of Personality Traits in the Italian Population. *Int. J. Environ. Res. Public Health*, 18, Article No. 5862.
- Saaty, T. L. (1977). A scaling method for priorities in hierarchical structures. *J. Math. Psychol.*, 15, 234–281.
- Saaty, T. L., & Vargas, L. (1994). *Decision-Making in Economic, Political, Social, and Technological Environments with the Analytic Hierarchy Process*. Pittsburgh, USA: PA.
- Sanchez, P. P., & Soyer, R. (1998). Information concepts and pairwise comparison matrices. *Inf. Process. Lett.*, 68, 185–188.
- Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- Shannon, C. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*.
- Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communications. *Bell Syst. Tech. J.*, 27, 379–423.
- Shannon, C.E. (1949). Communication Theory of Secrecy Systems. *Bell System Technical Journal*.
- Shim, E., Choi, W., & Song, Y. (2022). Clinical Time Delay Distributions of COVID-19 in 2020–2022 in the Republic of Korea: Inferences from a Nationwide Database Analysis. *J. Clin. Med.*, Article No. 3269.
- Shim, J., Warkentin, M., Courtney, J., Power, D., R., S., & Carlsson, C. (2002). Past, present, and future of decision support technology. *Decision Support Systems*, 3, 111-126.
- Shrotri, M., & други. (2021). *An interactive website tracking COVID-19 vaccine development*. Презето са The Lancet Global Health 9.5:
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8049589/>
- Soorki, M. N.; Manshaei, M. H.; Saad, W. et al. (2017). Collaborative real-time content download application for wireless device-to-device communications. *GLOBECOM 2017 - 2017 IEEE Global Communications Conference*, (стр. 1-6). Singapore.
- Stamp, M., & Low, R. (2007). *Applied Cryptanalysis: Breaking Chipers in the Real World*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Tangudu, V., Kakarla, J., & Venkateswarlu, I. (2022). COVID-19 detection from chest x-ray using MobileNet and residual separable convolution block. *Soft. Comput.*, 2197–2208.
- Tsoularis, A., & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*, 179(1), 21-55.
- Tsoularis, A; Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*, 179(1), 21-55.

- Tundjungari, V., & Sabiq, A. (2017). Android-based application using mobile adhoc network for search and rescue operation during disaster. *International Conference on Electrical Engineering and Computer Science (ICECOS)*, (стр. 16–21). Palembang, Indonesia.
- Vaz, S., & Torres, D. (2021). A Discrete-Time Compartmental Epidemiological Model for COVID-19 with a Case Study for Portugal. *Аџиомс*, 10, Article No. 314.
- Walrand, J. (2004). *Lecture Notes on Probability Theory and Random Processes*. Berkeley: University of California.
- Wang, X., Liu, S., & Huang, Y. (2016). A Study on the Rapid Parameter Estimation and the Grey Prediction in Richards Model. *Journal of Systems Science and Information*, 4(3), 223–234.
- Wikipedia. (.). *Generalised logistic function*. Преузето са https://en.wikipedia.org/wiki/Generalised_logistic_function
- Xu, L., Xie, L., Zhang, D., & Xu, X. (2022). Elucidation of Binding Features and Dissociation Pathways of Inhibitors and Modulators in SARS-CoV-2 Main Protease by Multiple Molecular Dynamics Simulations. *Molecules*, 27, Article No. 6823.
- Yan, Cosgrove, Anand, et al. (2016). RTDroid: a design for real-time android. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 15(10), 2564–2584.
- Yan, Y., Dantu, K., Ko, S. Y., Vitek, J., & Ziarek, L. (2017). Making android run on time. (стр. 25–36). Pittsburgh, USA: PA.
- Zakharov, V., Balykina, Y., Ilin, I., & Tick, A. (2022). Forecasting a New Type of Virus Spread: A Case Study of COVID-19 with Stochastic Parameters. *Mathematics*, 10, Article No. 3725.
- Zeigler, B. P., Praehofer, H., & Kim, T. G. (2000). *Theory of Modeling and Simulation: Discrete Event & Iterative System Computational Foundations (2nd Edition)*. London, UK: Academic Press.
- Zulkafi, A. Z., Basri, S., Jung, L. T., & Ahmad, R. (2016). Android based car alert system. *3rd International Conference on Computer and Information Sciences (ICCOINS)*, (стр. 501–506). Kuala Lumpur, Malaysia.
- Бајрами, Ш. (2014). ELECTRE i АНР – Системи за подршку вишекритеријунског одлучивању. *INFOTЕH*, (стр. 599-604). Јахорина.
- Веиновић, М., & Адамовић, С. (2013). *КРИПТОЛОГИЈА 1 - Основе за анализу и синтезу шифарских система*. Београд: Универзитет Сингидунум.
- Влада Републике Србије. (2004, октобар). *Стратегија реформе државне управе у Србији*.
- Вучинић, Д. (2020). Електронска управа – концепти услуге са освртом на електронску управу у Републици Србији. *Гласник права*, 45-56.

- Институт за јавно здравље*. (2021). Преузето са "Др Милан Јовановић Батут":
<https://sjz.gov.rs/login>
- Јовановић и сар. (2020). Multicriteria decision aid based model for measuring the efficiency of business friendly certification of cities. *Symmetry*, 12(6), Article ID: 1025.
- Јовановић, М. и сар. (2018). SOSerbia: Android-Based Software Platform for Sending Emergency Messages. *Complexity*, Article ID: 8283919.
- Јовановић, М., Стојановић, В., Кук, К., Поповић, Б., & Чисар, П. (2022). Asymptotic Properties and Application of GSB Process: A Case Study of COVID-19 Dynamics in Serbia. *Mathematics*, 10(20), Article No. 3849.
- Јоксимовић, Д., & Стојановић, В. (2019). *Вероватноћа и статистика*. Београд: Криминалистичко-полицијски универзитет.
- Кевкић, Стојановић, & Јоксимовић. (2017). Application of the Generalized Logistic Functions in the Surface Potential Based MOSFET Modeling. *Journal of Computational Electronics*, 16(1), 90-97.
- Кевкић, Т., Стојановић, В., & Јоксимовић, Д. (2018). Application of Generalized Logistic Functions in Modeling Inversion Charge Density of MOSFET. *Journal of Computational Electronics*, 17(2), 689-697.
- (2020). *Корисничко упуство за коришћење WEB апликације еВакцина*. Београд: Влада Републике Србије - Канцеларија за информационе технологије и електронску управу.
- Малишић, Ј. (1989). *Случајни процеси - теорија и примене*. Београд: Научна књига.
- Малишић, Ј. (2002). *Временске серије*. Београд: Математички факултет.
- Милићевић, М. Р., & Жупац, Г. (2012). An objective approach to determining criteria weights. *Mil. Tech. Cour.*, 60, 39–56.
- Милићевић, М., & Зупац, Г. (.). Објективни приступ одређивања тежине критеријума. *Војно-технички гласник*, 9(1), 39-56.
- Миловановић, Г. (1984). *Нумеричка анализа II*. Београд: Научна књига.
- Миловановић, Г., & Јоксимовић, Д. (2018). *Математика*. Београд: Криминалистичко-полицијски универзитет.
- Мимовић, П., Коцић, М., & Милановић, М. А. (2012). WOT model in selecting the optimal tourism development strategy in Vrnjaska Banja. *Теме*, 36, 815–836.
- Памучар, Д., Стевић, Ж., & Завадскас, Е. К. (2018). Integration of interval rough AHP and interval rough MABAC methods for evaluating university web pages. *Appl. Soft Comput.*, 67, 141–163.

- Панцић, С., & Панцић, Ј. (2012). Вишекритеријумско одлучивање при избору најповољније геодетске мерне технике за снимање на површинским коповима угља. *Зборник радова XXXIX Симпозијума о операционим истраживањима (SYM-OP-IS)*, (стр. 199 – 202). Тара.
- Поповић, М., Кузмановић, М., & Савић, Г. (2018). A comparative empirical study of Analytic Hierarchy Process and Conjoint analysis: Literature review. *Decis. Mak. Appl. Manag. Eng.*, 153–163.
- Поповић, Б., & Кук, К. (2017). *Информациони системи*. Београд: КПА.
- Поповић, Ч. Б. (1992). The first order RC autoregressive time series. *Scientific Review*, 21-22, 131-136.
- Портал еУправа*. (www.euprava.gov.rs). Преузето са www.euprava.gov.rs
- Раденковић, Б., & други. (2015). *Електронско пословање*. Београд: ФОН.
- Ранђеловић, Д., Јањић, Ј., Станковић, Ј., Ранђеловић, М., & Пешић, М. (2013). Weights determination in MCDM model combining the techniques of mathematical and statistical analysis. *Metal. Int.*, 217–221.
- Ранђеловић, Д., Станковић, Ј., Јанковић-Милић, В., & Станковић, Ј. (2013). Weight coefficient determination based on parameters in factor analysis. *Metal. Int.*, 3(34), 128–132.
- Ранђеловић, М.; Недељковић, С.; Јовановић, М.; и сар. (2020). Use of Determination of the Importance of Criteria in Business-Friendly Certification of Cities as Sustainable Local Economic Development Planning Tool. *Symmetry*, 12(2), Article ID: 425.
- Ранђеловић, М; Станковић, Ј; Савић, Г; Кук, К; Ранђеловић, Д. (2018). An Approach to Determining the Importance of Criteria in the Process of Certifying a City as a Business-Friendly Environment. *Interfaces*, 48, 156–165.
- Републички секретаријат за јавне политике, В. Р. (2020). Подршка реформи јавне управе. Београд, Србија.
- Спалевић, Ж., Милисављевић, Б., & Илић, М. (2017). Правни аспекти развоја Електронске управе у Републици Србији. *Зборник радова XIX научног скупа „Синергија”*, (стр. 125-130). Београд.
- Стојаковић, М. (1999). *Случајни процеси*. Нови Сад: Факултет техничких наука.
- Стојановић, В. (2012). *Статистика и вероватноћа - за инжењере*. Београд: Факултет за инжењерски менаџмент.
- Стојановић, В. (2022). *Увод у аналитику података*. Београд: Криминалистичко-полицијски универзитет.

- Стојановић, В. и сар. (2011). The Split-BREAK Model. *Brazilian Journal of Statistics & Probability*, 25(1), 44-63.
- Стојановић, В. и сар. (2014). Stochastic Analysis of GSB Process. *Publications de l'Institut Mathématique*, 95(109), 149-159.
- Стојановић, В. и сар. (2015). Model of General Split-BREAK Process. *REVSTAT - Statistical Journal*, 13(2), 145-168.
- Стојановић, В. и сар. (2016). Distributional Properties and Parameters Estimation of GSB Process: An Approach Based on Characteristic Functions. *ALEA - Latin American Journal of Probability & Mathematical Statistics*, 13(2), 835-861.
- Стојановић, В., Јоксимовић, Д., & Јокић, Н. (2021). *Теоријске основе криптологије*. Београд: Криминалистичко-полицијски универзитет.
- Стојановић, В., Миловановић, Г. В., & Јелић, Г. (2016). Distributional Properties and Parameters Estimation of GSB Process: An Approach Based on Characteristic Functions. *ALEA - Latin American Journal of Probability & Mathematical Statistics*, 13(2), 835-861.
- Стојановић, В., Поповић, Б., & Миловановић, Г. В. (2016). The Split-SV Model. *Journal of Computational Statistics & Data Analysis*, 100, 560-581.
- Стојановић, В.; Јоксимовић, Д.; Јокић, Н. (2021). *Теоријске основе криптологије*. Београд: Криминалистичко-полицијски универзитет.
- Стојановић, В.; Станковић, Ј.; Ранђеловић, М. (2012). The City of Niš Competitiveness Analysis in the Field of Foreign Direct Investment. *Econ. Enterp.*, 60, 167–178.
- Стојковић, О. (2020). *ПЦР тест на коронавирус – прецизно одређивање присуства вируса*. Преузето са Вео-lab: <https://www.beo-lab.rs/pcr-test-na-korona-virus/>
- Сукновић, М. (2010). *Пословна интелигенција и системи за подршку одлучивању*. Београд: Факултет организационих наука.
- Тешић, Б., & Петровић, М. (2020). *Како искористити предности електронског пословања*. Београд: Друштво математичара Србије.
- Чупић, М. В., Туммала, Р., & Сукновић, М. (2003). *Одлучивање - формални приступ*. Београд: Факултет организационих наука.
- Чупић, М., & Сукновић, М. (2010). *Одлучивање*. Београд: Факултет организационих наука.

7.1 АУТОРСКИ РАДОВИ

- Јовановић М.,** Бабић И., Чабаркапа М., Мишић Ј., Мијалковић С., Николић В. & Ранђеловић Д. (2018). SOSerbia: Android-Based Software Platform for Sending Emergency Messages. *Complexity*, Article ID: 8283919.
- Ранђеловић М., Недељковић С., **Јовановић М.,** Чабаркапа М., Стојановић В., Алексић А. & Ранђеловић Д. (2020). Use of Determination of the Importance of Criteria in Business-Friendly Certification of Cities as Sustainable Local Economic Development Planning Tool. *Symmetry*, 12(2), Article ID: 425
- Јовановић М.,** Недељковић С., Ранђеловић М., Савић Г., Стојановић В. & Ранђеловић Д. (2020). Multicriteria Decision Aid Based Model for Measuring the Efficiency of Business Friendly Certification of Cities. *Symmetry*, 12(6), Article ID: 1025.
- Јовановић, М.,** Стојановић, В., Кук, К., Поповић, Б. & Чисар, П. (2022). Asymptotic Properties and Application of GSB Process: A Case Study of COVID-19 Dynamics in Serbia. *Mathematics*, 2022; 10(20):3849. <https://doi.org/10.3390/math10203849>.

БИОГРАФИЈА

Михаило Јовановић је 1996. године дипломирао на Електротехничком факултету Универзитета у Београду, на студијском програму Електроника, телекомуникације, аутоматика, са просечном оценом 9,24, чиме је стекао звање дипломирани инжењер електротехнике. На истом факултету је 2001. године завршио магистарске студије са просечном оценом 10,00 и одбраном магистарске тезе под насловом „Тест програми за анализу ISDN додатних сервиса на базном корисничком приступу“ стекао звање магистар електротехничких наука. Докторске студије Информатике на Криминалистичко-полицијском универзитету уписао је школске 2017/2018. године.

Има 20 година професионалног искуства у Телекому и Пошти Србије, где је у континуитету 14 година био у највишем борду директора одговоран за информационе технологије, електронске комуникације и развој. Од априла 2017. године радио као саветник за електронску управу у Кабинету председника Владе. Тренутно ради као директор у Канцеларији за информационе технологије и електронску управу Владе Републике Србије. Неке од веома успешних референци Михаила Јовановић у области електронске управу су: успостављање првих квалификованих сертификационих тела за издавање квалификованих електронских сертификата и временских жигова у Републици Србији, успостављање централног система електронских матичних књига, пројекти: „Бебо, добродошла на свет“, пријављивање грађана за бесплатне акције и трговање хартијама од вредности, пријављивање грађана у поступку подношења захтева за реституцијом и техничко-технолошка подршка грађанима у процесу дигитализације ТВ сигнала.

Михаило Јовановић је добитник награде Министарства за науку, технологије и развој Владе Републике Србије 2002. године на јавном позиву „за најбоље младе истраживаче и научнике који су својим ангажовањем дали допринос развоју науке и технологије, променама у земљи, као и започетим реформама; који су остали у земљи и својим ангажовањем доприносе њеном свеукупном бржем развоју и повезивањем са светом“. Члан је Инжењерске коморе Србије од 2004. године са лиценцама одговорног пројектанта и одговорног извођача телекомуникационих мрежа и система. Аутор је монографија, две књиге и преко тридесет научних и стручних радова из области информационо-комуникационих технологија, електронског пословања и економије, објављених у референтним часописима и презентованих на водећим домаћим и међународним конференцијама.

Изјава о ауторству

Име и презиме студента докторских студија: Михаило Јовановић

Број индекса: 2R1-0002/17

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом:

„ОПТИМИЗАЦИЈА МАТЕМАТИЧКИХ МОДЕЛА ЗА ЛОГИСТИКУ БЕЗБЕДНОСТИ И ЕФИКАСНОГ ОДЛУЧИВАЊА У КОЛАБОРАТИВНИМ ВЕБ СЕРВИСИМА ЕЛЕКТРОНСКЕ УПРАВЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ“

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

У Београду, _____

Потпис студента докторских студија

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторске дисертације

Име и презиме студента докторских студија: Михаило Јовановић

Број индекса: 2R1-0002/17

Студијски програм: Докторске студије информатике

Наслов дисертације: „Оптимизација математичких модела за логистику безбедности и ефикасног одлучивања у колаборативним веб сервисима електронске управе Републике Србије“

Ментор: проф. др Владица Стојановић, ред. професор

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у Дигиталном репозиторијуму Криминалистичко-полицијског универзитета.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Криминалистичко-полицијског универзитета.

У Београду, _____

Потпис студента докторских студија

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Криминалистичко-полицијског универзитета унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Оптимизација математичких модела за логистику безбедности и ефикасног одлучивања у колаборативним веб сервисима електронске управе Републике Србије“

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Криминалистичко-полицијског универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA) (Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци).

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

У Београду, _____

Потпис студента докторских студија

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. **Ауторство** – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. **Ауторство** – некомерцијално – без прерада. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. **Ауторство** – некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. **Ауторство** – без прерада. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. **Ауторство** – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.